Kapitel 0

Die Eulersche Zahl e

Verzinsung von K_{auf} mit Zinssatz x

$$K_{end} = (1+x)\,K_{auf}$$

bei Verz. zur Mitte und Ende

$$K_{end} = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)K_{auf}$$

bei n-maliger Verzinsung

$$K_{end} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n K_{auf}$$

Kontinuierliche Verzinsung

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = ?$$

<u>Werden zeigen:</u> $= e^x$

insbes. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\ldots$

Eulersche Zahl

<u>Bemerkenswert:</u> $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1$

Die imaginäre Einheit i

$$i^2 = -1$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 \geq 0$, also $i \notin \mathbb{R}$

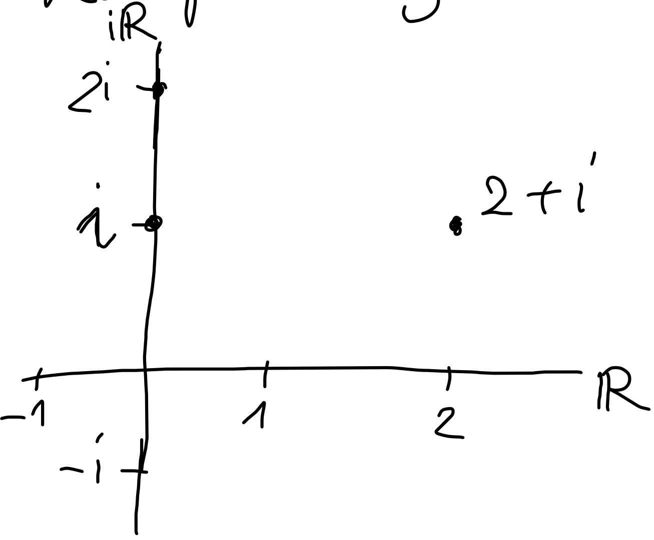
Rechnen: $i + i = 2i$ ("imaginäre Zahlen")

$$(2+i) - (1+2i) = 1 - i$$

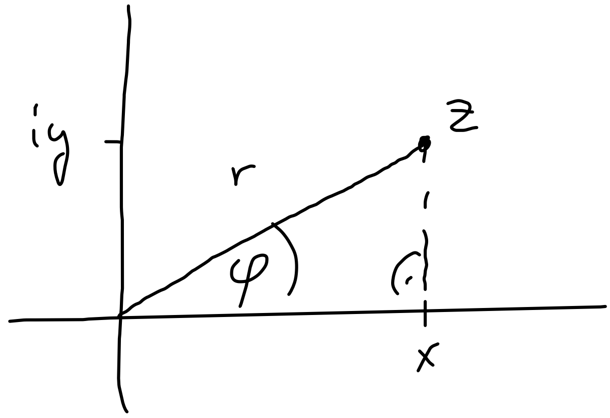
"komplexe Zahlen", $\dfrac{2i}{i} = 2$

$$(3i) \cdot (2i) = 6i^2 = -6.$$

komplexe Zahlen $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$



Polarkoordinaten



$$z = r\cos\varphi + i r \sin\varphi$$

umgekehrt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{falls } x > 0$$

Werden zeigen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

(Eulersche Formel)

mit $e^{z} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\varphi = 2\pi$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i2\pi} = 1}$$

Ein paar Erklärungen zur Logik

(nicht im Skript)

Symbole: $A(x)$ Aussage über x

Aussageform

$\forall x \in M : A(x)$ für alle $x \in M$ gilt $A(x)$

$\exists x \in M : A(x)$ es gibt (mind.) ein $x \in M$ mit $A(x)$

so dass gilt

$\exists_1 x \in M : A(x)$ es gibt genau ein $x \in M$ mit $A(x)$

Folgepfeile

$A \Rightarrow B$ "B folgt aus A"

"wenn A, dann B"

"~~B~~ A ist eine hinreichende Bedingung für B"

"B ist eine notwendige Bedingung für A"

$B \Leftarrow A$

⚠ "$A \Rightarrow B$" für "A und deshalb B"

$A \Leftrightarrow B$ bedeutet $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

"A ist äquivalent zu B"

"A genau dann, wenn B". $B \Leftrightarrow A$

Bsp $A: \quad a^2 = b^2$

$B: \quad a = b$

Es gilt $A \Leftarrow B$, aber nicht $A \Rightarrow B$.

Wie Mathematiker "und", "oder", "nicht" und "impliziert" benutzen

$A \wedge B$, "A und B", Konjunktion von A und B

$A \vee B$, "A oder B", Disjunktion von A und B

$\neg A$, "nicht A", Negation von A

Wahrheitstafeln:

$A \wedge B$	A w	A f
B w	w	f
B f	f	f

$A \vee B$	A w	A f
B w	w	w
B f	w	f

A	w	f
$\neg A$	f	w

$A \Rightarrow B$	A w	A f
B w	w	w
B f	f	w

Scheint unsinnig: Demnach wäre

"Aus $2+3=5$ folgt, dass 5 eine Primzahl ist" wahr.

Ebenso wäre "Fische, die bellen, beißen nicht."

$\forall x \in \{\text{Fische}\}$: x bellt $\Rightarrow$ x beißt nicht.

"Ex falso quodcumque."

extensionale Bedeutung von $\Rightarrow$

intentionale Bedeutung von $\Rightarrow$

Sinn: $\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$

soll als wahr gelten, wenn alle x, die $A(x)$ erfüllen, auch B erfüllen.

$A \sqcup B$	Aw	Af
Bw	f	w
Bf	w	f

Mengenlehre

(oft eng verwandt mit Logik)

Bsp $$\underbrace{M \cup N}_{\{x \mid x \in M \vee x \in N\}} = \underbrace{N \cup M}_{\{x \mid x \in N \vee x \in M\}}$$

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

Muss man Logikgesetze beweisen?

(z.B. wenn $a=b$ und $b=c$, dann $a=c$.)

- Im allg. nein

- Ausnahme 1: unübersichtliche Beziehungen

  - Bsp: $[(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B)] \Rightarrow (A \vee B)$

    → Wahrheitstafeln

    → schrittweises Zusammensetzen

    Bsp: beweise $A \Leftrightarrow B$ so:

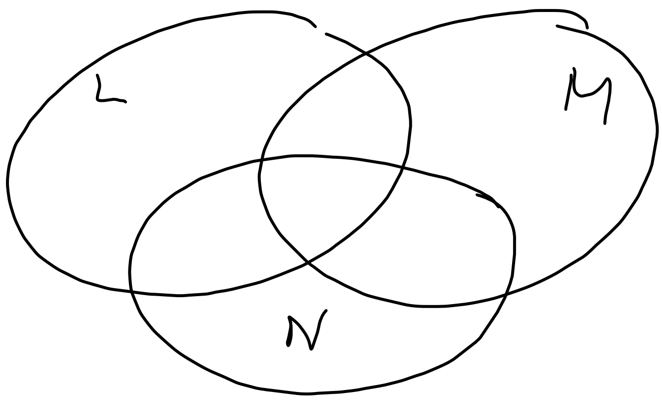
    Schritt 1 zeige $A \Rightarrow B$

    Schritt 2 zeige $B \Rightarrow A$ Kontraposition

    oder $\left\{ \begin{array}{l} \text{Schritt 1 zeige } A \Rightarrow B \\ \text{Schritt 2 zeige } (\neg A) \Rightarrow (\neg B) \end{array} \right.$

- Bsp $(L \cup M) \cap N = (L \cap N) \cup (M \cap N)$

Venn-Diagramm



Ausnahme 2:

Was mit Logik-Axiomen wie Principia Mathematica von B. Russell und A. Whitehead (1913)

oder Mengenlehre-Axiomen wie von E. Zermelo und Fraenkel (1907–1930)

Zweck: symbolisches (syntaktisches) Schließen