Kap. 1: Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{\text{natürliche Zahlen}\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{ganze Zahlen}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\text{rationale Zahlen}\} = \left\{ \frac{q}{p} \;\middle|\; q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \right\}$

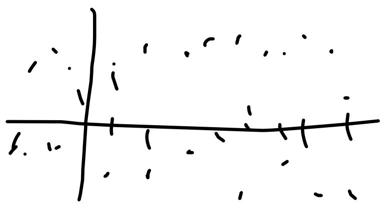
$\mathbb{R} = \{\text{reellen Zahlen}\} =$ "Zahlenkontinuum"

$\mathbb{C} = \{\text{komplexe Zahlen}\} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$=$ "Zahlenebene"

Def Seien A, B nichtleere Mengen.
f heißt <u>Abbildung</u> oder <u>Funktion</u>
von A nach B, $f: A \to B$

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall a \in A : f(a) \in B$$



Def cartesisches Produkt von Mengen
(nach Renatus Cartesius = René Descartes (1596 - 1650))

Seien M, N Mengen, so sei

$$M \times N := \{ (m, n) \mid m \in M, n \in N \}$$

geordnete Paare (m, n), $\quad (5,3) \neq (3,5)$
$\{5,3\} = \{3,5\}$

1.1 Zahlkörper

Wir werden $\mathbb{R}$ als einen "vollständigen angeordneten Körper" definieren.

Zunächst die Def. eines Körpers.

Sei $\mathbb{K}$ eine Menge und darauf 2 Verknüpfungen

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad (\text{"Addition"})$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad (\text{"Multiplikation"})$$

definiert. Notation $a+b := +(a,b)$

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$
(Assoziativität)

(A2) $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{K}$
(Kommutativität)

(A3) $\exists\, 0 \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K} : a+0 = a$
(Existenz eines neutralen Elementes der Addition)

<u>Folgerung</u> 1.2a): Aus (A2) & (A3) folgt, dass das neutr. El. eind. bestimmt ist.

Beweis: Wenn $\forall a \in \mathbb{K} : a+0 = a$ (1)
und $\forall a \in \mathbb{K} : a+0' = a$, (2)

dann $\underline{0' \stackrel{(1)}{=}} \; 0'+0 \stackrel{(A2)}{=} 0+0' \; \underline{\stackrel{(2)}{=} 0}$ $\square$

(A4) $\forall a \in K \ \exists\, \overset{c}{\cancel{\hat{a}}} \in K : a + \overset{c}{\cancel{\hat{a}}} = 0.$

(Ex. ~~v~~ von inversen Elementen der Add.)

Folgerungen 1.2

b) Die Gl. $a + x = \underline{b}$ $(a, b$ geg.$)$ wird durch $x = b + \hat{a}$ ($\hat{a}$ irgendein add. Inverses zu a) gelöst.

Beweis: $$\underline{a + (b + \hat{a})} \overset{(A?)}{=} (b + \hat{a}) + a \overset{(A1)}{=} b + (\hat{a} + a) \overset{(A2)}{=} b + (a + \hat{a}) \overset{\text{Vor.}}{=} b + 0 \overset{(A3)}{=} \underline{b}. \qquad \square$$

c) Die Lsg. in b) ist eind. (ÜA 5)

d) b) und c) $\overset{b=0}{\Longrightarrow}$ das Inv. $\tilde{a}$ von a ist eind.

$$-a := \tilde{a}$$

$$b - a := b + (-a)$$

e) $-0 = 0$ <u>Bew.</u>: $0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ 0 ist ein add. Inv. zu 0. $\square$

(M1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$
(Ass.)

(M2) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in K$
(Kommutativität)

(M3) $\exists\, 1 \in K : \forall a \in K : \ a \cdot 1 = a$

(Ex. eines neutralen Elementes der Multiplikation)

<u>Folgerung</u> 1.3 a) Das neutr. El. der Mult. ist eind. best. (ÜA)

(M4) $\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists\, \hat{a} \in K : \ a \cdot \hat{a} = 1$.

(Ex. von inversen Elementen der Multiplikation)

<u>Folg. 1.3 b)</u> Für $a \neq 0$ wird die Gl.

$a \cdot x = b$ durch $x = b \cdot \hat{a}$ gelöst.

c) Die Lsg. in b) ist eind., insbes. ist das mult. Inverse von $a \neq 0$ eind., $a^{-1} := \hat{a}$, $b \cdot \hat{a} =: \frac{b}{a}$.

(D) $\quad a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$

(Distributivität)

1.4 Def Ein Körper ist eine mind. 2-elementige Menge $\mathbb{K}$ mit Verkn. $+$ und $\cdot$, die (A1) - (A4), (M1) - (M4), (D) erfüllen.

1.5 Bem $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper

1.6 Folgerungen Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

$$(\mathbb{K}, +, \cdot) = \mathbb{K}$$

a) $\forall a \in \mathbb{K} : \ a \cdot 0 = 0$

Bew $\quad a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{(D)}{=} a \cdot (0+0)$

$$\overset{(A3)}{=} \underline{a \cdot 0}$$

$\Rightarrow$ $a \cdot 0$ ist Lsg der Gl.

$$a \cdot 0 + x = a \cdot 0 \quad (3)$$

$$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$$

d.h. 0 ist auch Lsg von (3)

eind

$\Rightarrow$ ~~$a \cdot 0$~~ $a \cdot 0 = 0$ $\square$

b) $\forall a \in \mathbb{K}: \underline{(-1) \cdot a} = -a$

<u>Bew</u> zu zeigen: $a + ((-1) \cdot a) = 0$.

$$\underline{0} \overset{1.6a)}{=} a \cdot 0 \overset{(M2)}{=} 0 \cdot a \overset{(A4)}{=} \big(1 + (-1)\big) \cdot a$$

$$\overset{(D)}{=} (1 \cdot a) + \big((-1) \cdot a\big) \overset{(M2)}{=} (a \cdot 1) + \big((-1) \cdot a\big)$$

$$\overset{(M3)}{=} \underline{a + ((-1) \cdot a)}. \qquad \square$$

c) $(-1)\cdot(-1) = 1$

Bew $\quad$ b) $\Longrightarrow (-1)\cdot(-1) = -(-1)$

$$-1+1 \overset{(A2)}{=} 1+(-1) \overset{(A4)}{=} 0$$

d.h. 1 ist $\underbrace{\text{eine}}_{\text{die}}$ add. Inv. zu -1

d.h. $-(-1) = 1$. $\square$

1.7 Def Eine Menge G mit einer Verkn. $\circ: G\times G \to G$ heißt **Gruppe**, wenn

(G1): $(g\circ h)\circ j = g\circ(h\circ j)$ $\forall g,h,j\in G$ (Ass.)

(G2) $\exists e\in G: \forall g\in G: g\circ e = e\circ g = g$ (Ex. eines neutr. Elements)

<u>Folg</u> Das neutr. El. ist eind.

(G3) $\forall g \in G \; \exists g^{-1} \in G:$

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

(Ex. von Inv.)

Falls außerdem

(G4) $g \cdot h = h \cdot g \quad \forall g, h \in G$

dann heißt $(G, \cdot)$ <u>kommutativ</u> oder <u>abelsch</u> (Niels Henrik Abel 1802-1829).

<u>Bsp</u> $(\mathbb{K}, +)$ ist abelsche Gruppe.

$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

Anordnung $a<b$

Auf $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es eine Anordnung $<$.

$<$ ist eine Relation auf $\mathbb{K}$,

Relation R auf Menge M bedeutet:

$\forall a,b \in M$: "$a R b$" ist entweder ~~fal~~ wahr oder falsch

Oder $R \subseteq M \times M$,

$$R = \{(a,b) \in M \times M \mid a R b\}$$

Bspe für Relationen

1) $=$ auf bel. M
2) $\subseteq$ auf $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{X \mid X \subseteq \cancel{M}\, \mathbb{N}\}$ "Potenzmenge"

3) Kongruent auf {Dreiecke in der Ebene}

Def Ein angeordneter Körper ist ein Köper $(K, +, \cdot)$ mit einer Relation $<$, so dass

(O1) immer genau eine der Aussagen

$$a < b$$
$$a = b$$
$$b < a \quad \text{gilt (Trichotomie)}$$

(O2) wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$ (Transitivität)

(O3) wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$ $\forall c \in K$.

(O4) wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $a \cdot c < b \cdot c$

Notation $b > a \;:\Longleftrightarrow\; a < b$.
$a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; b \geq a \;:\Longleftrightarrow\; (a < b \text{ oder } a = b)$