$(K, +, \cdot)$ Körper

<u>Folgerung</u> In jedem Körper gilt $1 \neq 0$. (ÜA 5)

<u>Def</u> ang. Körper $(K, +, \cdot, <)$

(O1) genau eine von $a < b$

$a = b$

$b < a$

(O2) wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$

(O3) wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$

(O4) wenn $a < b$ und $c > 0$, dann $a \cdot c < b \cdot c$,

Folgerungen 1.8 In allen ang. Kö gilt:

a) wenn $a > 0$, dann $-a < 0$.

Bew (O3) wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$

wenn $0 < a$, dann $\underbrace{0 - a}_{-a+0=-a} < \underbrace{a - a}_{0}$ $\square$

a') wenn $a < 0$, dann $-a > 0$.

Bew (O3) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

$a < 0 \Longrightarrow \underbrace{a - a}_{0} < \underbrace{0 - a}_{-a}$ $\square$

a'') $\underline{1 > 0}$ (ÜA 5e)

b) wenn $\underline{a > 0}$, dann $\underline{a^{-1} > 0}$

Bew Wäre $\underline{a^{-1} \not> 0}$, dann nach (O1)

entweder $\underline{a^{-1} < 0}$, dann (O4) $\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{= a \cdot a^{-1} = 1} < \underbrace{0 \cdot a}_{0}$

$\Rightarrow 1 < 0 \overset{(O1)}{\Rightarrow} 1 \not> 0$ ↯

oder $a^{-1} = 0$, dann (O4) $\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1} = \underbrace{0 \cdot a}_{0}$

$\Rightarrow 1 = 0$ ↯

$\square$

c) wenn $a^2 \leq b^2$ und $a, b > 0$,

dann $a \leq b$.

Bew Sei $\underline{a, b > 0}$, $a^2 \leq b^2$.

Wäre $a \not\leq b$, dann (O1) $\underline{a > b}$

$$\overset{(O4)}{\Longrightarrow} a^2 = a \cdot a > b \cdot a \text{ und}$$

$$b \cdot a = a \cdot b > b \cdot b = b^2$$

$$\overset{\text{transitiv}}{\Longrightarrow} a^2 > b^2 \ \lightning \text{ zu } a^2 \leq b^2 \text{ und (O1).}$$

$\square$

d) $\overbrace{1+1}^{=:2} > 0$ Bew (a'') $\underline{0 < 1}$

$$\overset{(O3)}{\Longrightarrow} \underbrace{0+1}_{1+0=\underline{1}} < \underline{1+1}, \overset{\text{transitiv}}{\Longrightarrow} 0 < 1+1.$$

$\square$

Bem Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Relation $<$, die $\mathbb{C}$ zum ang. Kö. machen würde.

Bew durch Widerspruch:

Es ist $\underline{i \neq 0}$, denn $i^2 = -1$, $0^2 = 0 \neq -1$.

Nach (O1) entweder $0 < i$, dann (O4) $\underbrace{0 \cdot i}_{} < i \cdot i = -1$

aber (1.8a'') $1 > 0 \overset{1.8a)}{\Longrightarrow} -1 < 0$ ↯ zu (O1).

oder $i < 0$, dann 1.8a') $-i > 0$

$$\underbrace{0 \cdot (-i)}_{\underline{0}} \underline{<} (-i) \cdot (-i) = -(i \cdot (-i)) = -(-(i^2)) = i^2 = \underline{-1} \text{ ↯}$$

$\square$

1.9 Def $a \in \mathbb{K}$ heißt <u>positiv</u> $\Leftrightarrow a > 0$

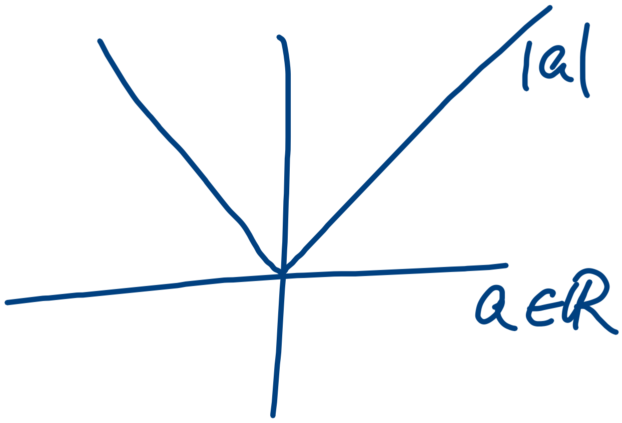
<u>negativ</u> $\Leftrightarrow a < 0$

1.10 Def Der <u>Betrag $|a|$</u> von $a \in \mathbb{K}$ ist

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

"stückweise Definition"

$|\cdot| : \underline{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$



1.11 Folgerungen $\quad \forall a, b \in \mathbb{K}$ gilt

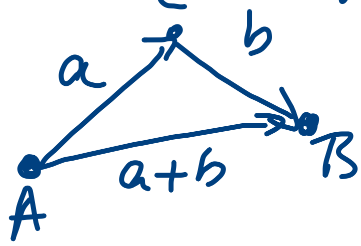
a) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ nur für $a = 0$ ✓

b) $a \leq |a|$

c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

d) $a^2 = a \cdot a = |a|^2$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ "Dreiecksungleichung"



f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

"Dreiecksungleichung von unten"

Bew a) Fallunterscheidung:

Falls $a > 0$: $|a| \overset{\text{Def}}{=} a > 0$

Falls $a < 0$: $|a| = -a > 0$

Falls $a = 0$: $|a| = 0$

Bew b) Falls $a \geq 0$: $|a| = a$ ✓

Falls $a < 0$: $|a| = -a > 0$

transi. $a < 0 < -a = |a|$

$\Rightarrow a < |a|$. $\Rightarrow a \leq |a|$.

c) - Falls $a \geq 0, b \geq 0$: dann $a \cdot b \geq 0 \cdot b = 0$

$\Rightarrow |a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

- Falls $a < 0, b \geq 0$: dann $a \cdot b \leq 0 \cdot b = 0$

$\Rightarrow |a \cdot b| = -(a \cdot b)$

$|a| \cdot |b| = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ✓

- Falls $a < 0, b < 0$: $\cancel{0 \cdot (-b) < (-a) \cdot (-b)}$

$0 < (-a) \overset{(O4)}{\Longrightarrow} \underbrace{0 \cdot (-b)}_{0} < \underbrace{(-a)}_{|a|} \cdot \underbrace{(-b)}_{|b|} = -(-(a \cdot b))$

$= a \cdot b = |a \cdot b|$

d) $a^2 = |a|^2$

Falls $a \geq 0$: dann $|a| = a$

Falls $a < 0$: $|a|^2 = (-a) \cdot (-a)$

$$= -(-(a^2)) = a^2$$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|a+b|^2 \overset{d)}{=} (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= (a+b)a + (a+b)b$$

$$= a^2 + \underbrace{ba}_{ab} + ab + b^2$$

$$= a^2 + (1+1)ab + b^2$$

$$= a^2 + 2\underbrace{ab}_{\leq |ab|\ (b)} + b^2 , \quad 2 > 0 \overset{(04)}{\Longrightarrow} 2ab \leq 2|ab|$$

$$\overset{(03)}{\leq} a^2 + 2|ab| + b^2 \overset{c),d)}{=} |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

Also $\underline{|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2}$

1.8 c) : $x^2 \leq y^2,\ x,y \geq 0 \Rightarrow x \leq y$

$x = \underline{|a+b|},\ y = \underline{|a|+|b|}$

$|a+b| \geq 0,\ |a|+|b| \geq 0 \Rightarrow$ Beh.

f) $|a| = |b+(a-b)| \overset{e)}{\leq} |b|+|a-b|$

$\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$

$a \leftrightarrow b$: $|b|-|a| \leq |b-a| = |-(a-b)| = |a-b|$

$x \leq y$ und $-x \leq y \Rightarrow |x| \leq y$

$\Rightarrow \big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$, q.e.d. $\square$

1.2 $\mathbb{N}$ und vollst. Induktion

<u>Def</u> $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>induktiv</u>, falls $1 \in M$ und wenn $x \in M$, dann $x+1 \in M$.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

<u>Induktionsprinzip</u>: Ist M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, dann $M = \mathbb{N}$.

Bewsismethode der vollständigen Induktion
(Blaise Pascal 1654)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. <u>Bel</u> $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

- Beweise $A(1)$ ("Induktionsanfang", "Induktionsanker")
- Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$. ("Induktionsschritt")

Induktionsannahme.

1.12 Bsp **Beh** $\sum_{k=1}^{n} k^2 := 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$

Beweis durch vollst. Ind.

Anker: $n=1$: Beh $\Leftrightarrow$ $1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$

wahr

Induktionsann.: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$

Bew. Ind. schritt: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)\underbrace{(2n+3)}_{(2(n+1)+1)}, \quad q.e.d. \quad \square$$

Enactus tuebingen

philipp.pohlmann@tuebingen.enactus.de