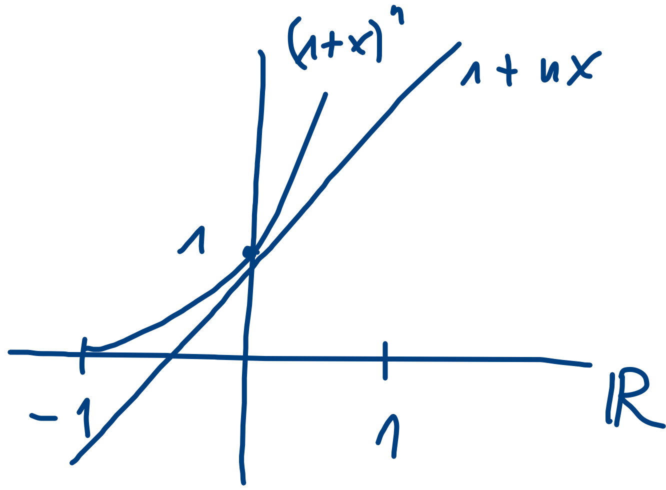
1.13 Satz Bernoullische Ungleichung

Sei K ein ang. Kö., $x \in K$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann



$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Ist $n \geq 2$ und $x \neq 0$, dann ist sogar

$$(1+x)^n > 1 + nx .$$

Beweis Für $x=0$: li. S. $= 1$

re. S. $= 1$ (klar)

Für $x=-1$: ~~li~~ li. S. $= 0$, re. S. $= 1-n$ (klar)

Für $n=1$: li. S $= 1+x$, re. S $= 1+x$ (klar)

Für $n \geq 2$, $-1 \neq x \neq 0$: durch Ind.

Anker $n=2$: li. S. $= (1+x)^2$

$= 1+2x+x^2 > 1+2x =$ re. S.

$x^2 \geq 0$, sogar $x^2 > 0$ für $x \neq 0$

Ind. Ann.: $(1+x)^n > 1+nx$ für $-1 \leq x \neq 0$

Schritt: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0}$

$\geq (1+nx)(1+x) =$

$= 1+nx+x+nx^2$

$= 1+(n+1)x+nx^2 \underset{\Uparrow}{>} 1+(n+1)x$

$nx^2 > 0$ $\square$

1.14 Def a) $0! = 1$ "induktive Def."

$(n+1)! = n!\,(n+1)$ "n Fakultät"

$n! = 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n := \prod_{k=1}^{n} k$

k) Für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} & \text{für } k \geq 1 \\ 1 & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

"x über k"
"x wähle k"
"x choose k"

1.15 Bem a) Für $x \in \mathbb{N}_0$ und $k > x$ ist $\binom{x}{k} = 0$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \text{Anz. der } k\text{-el. Teilmengen einer } n\text{-el. Menge.}$$

Bsp Lotto 6 aus 49

$\#$ Möglichkeiten $= \binom{49}{6} \approx 13$ Mio.

$\uparrow$ Anz.

$n! =$ Anz. mögl. Reihenfolgen von n Objekten

c) $\forall k \in \mathbb{N}$: $\binom{x+1}{k} = \underline{\binom{x}{k-1}} + \binom{x}{k}$

Bew $k!$ li.S. $= (x+1)\,x\,(x-1)\cdots(x-k+2)$

$k!$ re.S. $= x(x-1)\cdots(x-k+2)\,k$

$\quad + x(x-1)\cdots(x-k+2)(x-k+1)$

$\quad = x(x-1)\cdots(x-k+2)\left[\cancel{k} + x \cancel{-k} + 1\right]$

$\square$

Pascalsches Dreieck

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	. .
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1.16 Binomischer Lehrsatz

Sei $\mathbb{K}$ Kö., $x, y \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

<u>Bew</u> ÜA.

<u>Bsp</u>

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

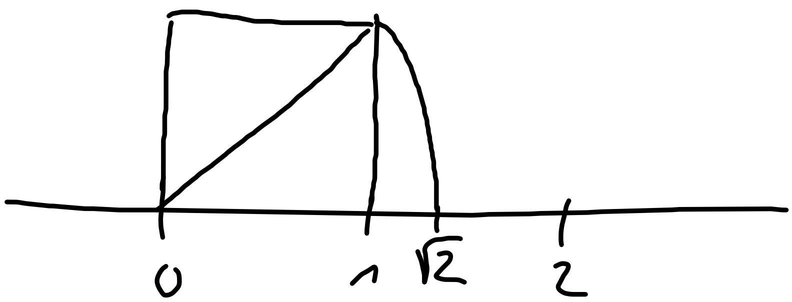
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

Kap. 2: Vollständigkeit und Konvergenz

2.1 Vollst.

Zahlengerade



$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ "$\mathbb{Q}$ hat Löcher"

Vollst. $\Leftrightarrow$ "keine Löcher"

brauchen präzise Formulierung

Teilmenge

$\subset \quad \subseteq$

$\subsetneq \quad \subset$

2.1 Def Sei $\mathbb{K}$ ang. Kö., $M \subset \mathbb{K}$

M heißt <u>nach oben beschränkt</u>

$:\Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathbb{K} \ \forall x \in M: \ x \leq s.$

Jedes solche s heißt eine <u>obere Schranke</u> an M.

entspr. nach unten beschr., untere Schr.

M heißt <u>beschränkt</u> $\Leftrightarrow$

nach oben und unten beschr.

$\Leftrightarrow \exists r, s \in K : \forall x \in M : \; r \le x \le s$.

<u>2.2 Def</u> Falls s ob. Schr. an M ist

und für jede ob. Schr. t von M gilt $s \le t$,

dann heißt s eine <u>kleinste obere Schranke</u>

von M oder <u>Supremum</u> von M, <u>$\sup M$</u>.

(Nicht jedes $M \subset K$ besitzt ein sup.)

Entsprechend <u>größte untere Schranke</u>

$=$ Infimum M $=$ $\inf M$.

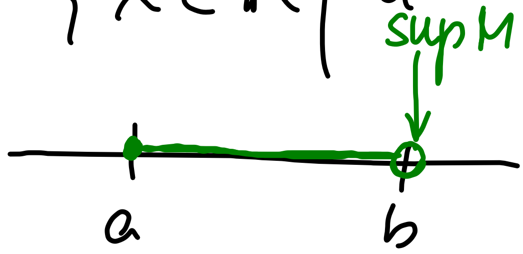
2.3 Bsp a) halboffenes Intervall

$$M = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \qquad (a<b)$$

$[a,b]$

(a,b)

$(a,b]$



Def s ist ein Maximum von M $:\Longleftrightarrow$

$s \in M$ und $\forall x \in M: \; \underline{x \le s}$.

$\Longrightarrow \; s = \sup M$.

Bew: t ob. Schr. $\Longrightarrow s \le t$, q.e.d.

$\sup\,[a,b) = b, \quad \inf\,[a,b) = a$

<u>Beweis</u> $\forall x \in [a,b): \; x < b \Rightarrow x \le b$

$\Rightarrow$ b ist ob. Schr. Kleinste?

Logikregel: Kontraposition $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

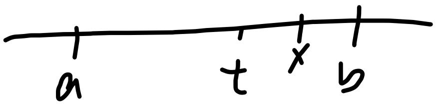
"modus tollens"

$$s = \sup M \Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ ob. Schr.} \\ \underbrace{t \text{ ob. Schr} \Rightarrow s \le t}_{\Leftrightarrow\, (s > t \,\Rightarrow\, t \text{ keine ob. Schr.})} \end{cases}$$

Vorausgesetzt $b > t$. <u>Beh</u>: t ist nicht ob. Schr.

Beweis: Entweder $t < a \Rightarrow M \ni a \not\le t \Rightarrow t$ nicht ob. Schr.

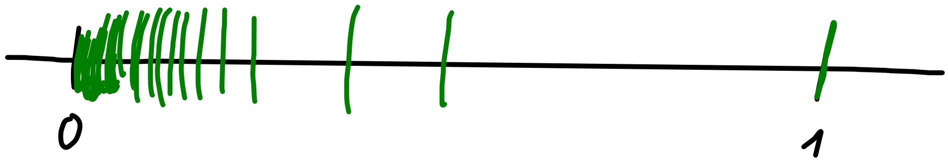
oder $a \le t < b$, $\quad x := \dfrac{t+b}{2}$, $\quad t < b \Rightarrow \underbrace{t+t}_{2t} < t+b$



$\Rightarrow t < x$ also t nicht ob. Schr.

Fazit b ist kleinste ob. Schr. $\square$

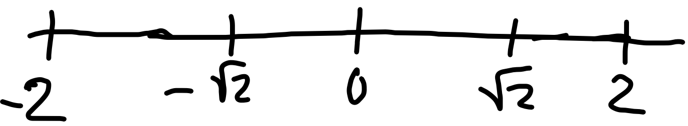
b) $M = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



$\sup M = 1$, denn $\frac{1}{n} \leq 1$
und $t < 1$ nicht ob. Schr.

$\inf M = 0$, wie wir noch beweisen werden (klar: 0 ist unt. Schr.)

c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $M = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \}$



hat ob. Schr., z. B. 2
aber $\underbrace{\nexists \sup M \text{ in } \mathbb{Q}}_{\text{lässt sich zeigen}}$

während in $\mathbb{R}$ $\underbrace{\sup M = \sqrt{2}}_{\text{werden wir zeigen}}$.

2.4 Bem a) sup M ist eind.:

Beweis Falls s, s' ob. Schr.

$s \le t \quad \forall$ ob. Schr t

$s' \le t \quad \forall$ ob. Schr t

Dann $s \le s'$ und $s' \le s$

$(s = s'$ oder $s < s')$ und $(s = s'$ oder $s' < s)$

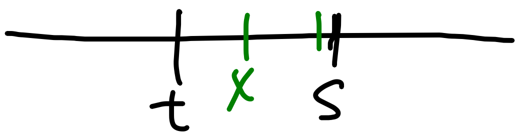
$(Q$ oder $P)$ und $(A$ oder $B)$

QA oder PA oder QB oder PB

$s = s'$ oder $\cancel{s < s' \wedge s = s'}$ oder $\cancel{s = s' \wedge s' < s}$ oder $\cancel{s < s' \wedge s' < s}$

$\Rightarrow \quad s = s'$ □

b) Wenn $\exists \sup M =: s$, dann $\forall t < s \; \exists x \in M : t < x$



Beweis: Sonst wäre t ob. Schr, $\Rightarrow s$ nicht kleinste ob. Schr ↯ □

Also: sup M lässt sich durch El. von M annähern

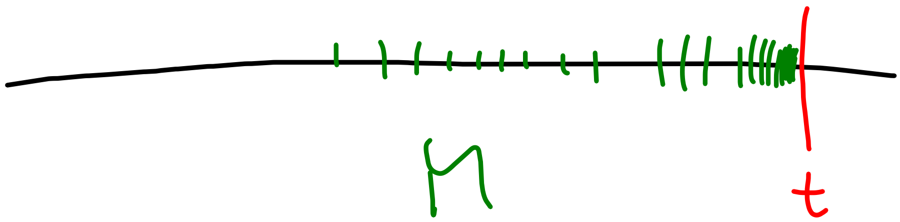
c) $\inf M = -\sup(-M)$, falls eine Seite existiert.

$-M = \{-x \mid x \in M\}$

d) $\max M = m \iff \begin{cases} m \in M \\ \forall x \in M: x \leq m \end{cases}$

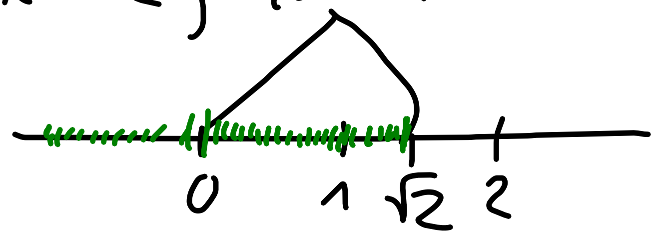
Def Ein ang. Kö $\mathbb{K}$ heißt <u>vollständig</u>, wenn gilt

(S) Jede nach oben beschr. Menge $M \subset \mathbb{K}$ besitzt ein Supremum.



Ex. **2.5 Bem** a) $\mathbb{Q}$ nicht vollst., weil

$$\nexists \sup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \text{ im } \mathbb{Q}$$



b) Man kann zeigen:

- $\exists$ vollst. ang. Kö
- alle vollst. ang. Kö stimmen überein bis auf Umbenennen der Elemente.

Def $\mathbb{R}$ = "der" vollst. ang. Kö.