Def $\mathbb{R}$ = vollst. ang. Kör.

vollst. $\Leftrightarrow$ "Supremumsaxiom"

(S) Jede nach oben beschr. Menge hat ein Supremum.

2.6 Satz von Archimedes

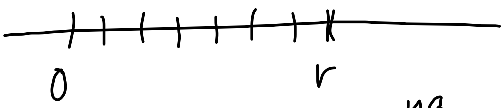
Variante 1: $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n > r$

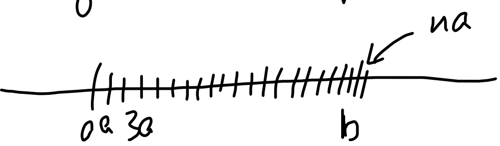
("$\mathbb{N}$ ist unbeschr. in $\mathbb{R}$")

Variante 2: ~~$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists n$~~

$\forall a, b \in \mathbb{R}$: wenn $\overbrace{a, b > 0}^{a>0 \text{ und } b>0}$,

dann $\exists n \in \mathbb{N}: na > b$.





<u>Bew Variante 1</u>: Wäre $\mathbb{N}$ beschr. $\overset{(S)}{\Longrightarrow}$

$\exists \sup \mathbb{N} =: s.\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \leq s$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n+1 \leq s$, daher $n \leq s-1$

Also ist $s-1$ ob. Schr. an $\mathbb{N}$ ↯

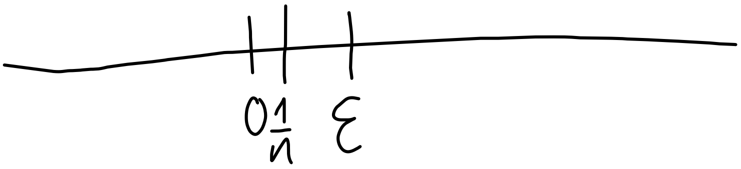
<u>Bew Variante 2</u> $\quad a, b > 0 \Longrightarrow r := \frac{b}{a} > 0$

Var 1 $\Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \quad n > r = \frac{b}{a}$, also $na > b$.

$\square$

<u>2.7 Bem</u> weitere Varianten:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$ "Satz von Eudoxos"



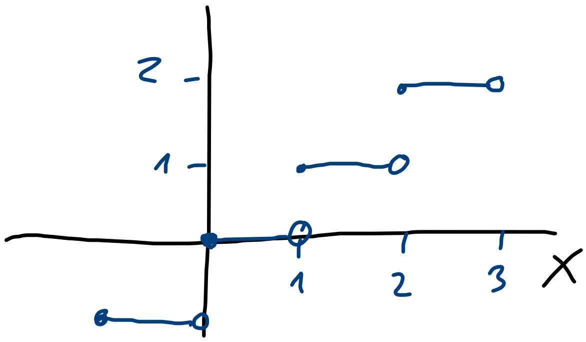
<u>Bew</u> Wähle $n > r := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\square$

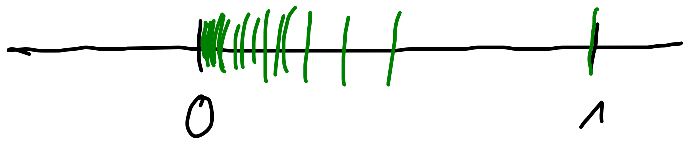
<u>Notation</u> $\exists_1 = \exists! =$ "es gibt genau ein"

- $\forall x \in \mathbb{R} : \exists_1 k \in \mathbb{Z} : \quad k \leq x < k+1$

$$k =: \lfloor x \rfloor \quad \text{"Gaußklammer von } x\text{"}$$



- <u>Bem</u> Eudoxos $\Longrightarrow \inf\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = 0$



2.10 Satz ("Wohlordnungsprinzip")

Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein Minimum.

Jede nichtleere nach unten beschr. Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Min.

<u>Bew</u> Sei $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$, $M^c = \mathbb{N} \setminus M$

Hätte ~~k~~ M kein kleinstes El., dann $\underline{1 \in M^c}$

Induktion: $\underline{\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset M^c \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Schritt: $n+1 \in M^c$, sonst wäre $n+1 \in M$ das kleinste El. von M $\Longrightarrow$ Schritt

$\Longrightarrow M^c = \mathbb{N}$ und $M = \emptyset$ ↯ ∎

Nun $M \subset \mathbb{Z}$, $M \neq \emptyset$, $\mathbb{R} \ni \underline{s \leq k}$ $\forall k \in M$

Falls $\exists m \in M : \underline{m < 0}$

Archimedes $\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N} :$ $n > r := -s$

also $-n < \underline{k}$ $\forall k \in M$

$$\emptyset \neq n + M = \{ n+k \mid k \in M \} \subset \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $\exists \min(n+M) =: K$

$\Rightarrow$ $K - n = \min M$. $\square$

2.11 Bem

- Jede nach oben beschr. $\underbrace{\text{Teilmenge}}_{}$ nichtleere $M \subset \mathbb{N}$ hat Max.

<u>Bew</u>: $s :=$ ob. Schr. $\underline{\exists n > s}$, also ist

$$M_2 := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > k \ \forall k \in M \} \neq \emptyset$$

also WOP $\Rightarrow$ $\exists \min M_2 =: k_2$.

$K_2 - 1 \in M$ und $K_2 - 1 \geq k \;\; \forall k \in M$

also $K_2 - 1 = \max M$ $\square$

- Bruch kürzen: „Bruch kann vollst. gekürzt werden":

Seien $q, p \in \mathbb{N}$

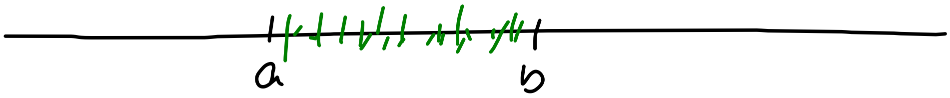
$$\{p' \in \mathbb{N} \mid \exists q' \in \mathbb{N} : \frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}\} \neq \emptyset$$

also (WOP) $\exists$ min $\square$

2.8 Satz Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \iff$ „$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$"

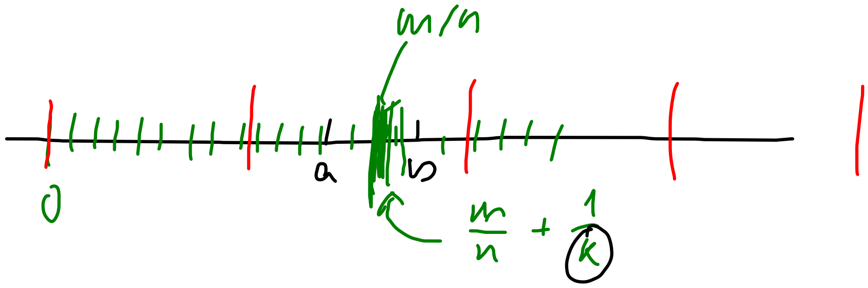
(Beh 1)



Tatsächlich $\# (a,b) \cap \mathbb{Q} = \infty$ (Beh 2)

Anz. El.

Beweisidee



Bew Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$ (Eudoxos)

$\longrightarrow$ $m := \min \underbrace{\{ k \in \mathbb{Z} \mid k > an \}}$

$\neq \emptyset$ nach Archimedes Var. 2

nach unten beschr. durch an

$\overset{\text{WOP 2.10}}{\Longrightarrow}$ $\exists \min$.

Dann $a < \frac{m}{n} = \underbrace{\frac{m-1}{n}}_{\leq a} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{< b-a} < b$ ($\Rightarrow$ Beh 1)

Ferner $\exists K \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{K} < b - \frac{m}{n}$ (Eudoxos)

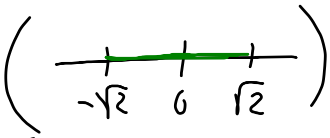
$\forall k \in \mathbb{N}$ mit $k > K$: $a < \underbrace{\frac{m}{n} + \frac{1}{k}} < \frac{m}{n} + \frac{1}{K} < b \Rightarrow$ Beh 2

□

2.13 Satz $\exists q > 0 : q^2 = 2$ ("$\exists \sqrt{2}$")

Tatsächlich $\exists \sqrt[n]{a}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall a > 0$.

Bew $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$



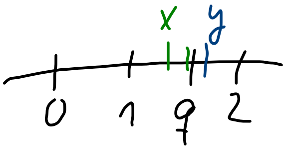
$M \neq \emptyset$ $(1 \in M)$, nach ob. beschr. durch 2

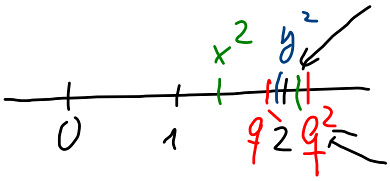
$(S) \Rightarrow \exists \sup M =: q$, $1 \leq q \leq 2$

$1 < q < 2$

Beh $q^2 = 2$

Beweisidee





Bew Wäre $q^2 > 2$, dann (Eudoxos) $\frac{1}{n} < q^2 - 2$ $\Leftarrow q^2 > 2 + \frac{1}{n}$

und (Def sup) $\exists x \in M : x > q - \frac{1}{4n}$

$$\Rightarrow x^2 > q^2 - \frac{q}{2n} + \frac{1}{16n^2} > 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{16n^2} > 2 \ ↯$$

$> 2 + \frac{1}{n}$ $\quad \cancel{< 2 + \frac{1}{n}}$ $\quad \leq \frac{1}{n}$ weil $q < 2$

Wäre $q^2 < 2$, dann $q^2 < 2 - \frac{1}{n}$ (Eudoxos)

Wähle $q < y < q + \frac{1}{8n}$, dann $y \notin M$

$$y^2 < \underbrace{q^2}_{< 2 - \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{q}{4n}}_{\le \frac{1}{2n}} + \frac{1}{64n^2} < 2 - \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{64n^2}}_{\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{64n}}_{< \frac{1}{2}}\right)}_{< 1} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n}} < 2 \ \lightning$$

$\square$

2.2 Folgen

$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, ~~$(x_n)$~~

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (x_n) oder $(x_n)_n$

vs. x_n

Def $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ~~$(x_n)$~~ $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\left(B^A = \{ f : A \to B \} \right)$

Bsp $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) = (\frac{1}{n})$

2.14 Def

Die Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$

oder $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$

oder $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

oder (x_n) ist konvergent gegen x

$\in \mathbb{R}$

wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$

x heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge (x_n)

Eine Nullfolge ist eine gegen 0 konvergente Folge, also

(x_n) ist Nullfolge $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n| < \varepsilon.$

Bem

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \iff x_n - x \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

d.h. $(x_n - x)$ ist Nullfolge