Def $x_n \to x \quad :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \underline{n_\varepsilon} \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; |x_n - x| < \varepsilon$$

oder $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m :$

$$|x_n - x| < \varepsilon .$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall x \, \exists y : A(x,y) \\ \exists y \, \forall x : A(x,y) \end{array} \right]$$

2.15 Bspe für Nullfolgen

a) $x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

<u>Bew</u> Zu geg. $\varepsilon > 0$ setze $n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

daher $n \geq n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

also $|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. $\square$

b) $$(x_n) = (\underset{1}{1}, \underset{2}{1}, \underset{3}{0}, \underset{4}{1}, \underset{5}{0}, \underset{6}{0}, \underset{7}{0}, \underset{8}{1}, 0 \dots)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist keine Nullfolge.

~~Bew.~~ Vorbem

de Morgan'sche Regel

$$\neg \forall x : A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x : \neg A(x)$$

$$\neg \exists x : A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : \neg A(x)$$

Daher

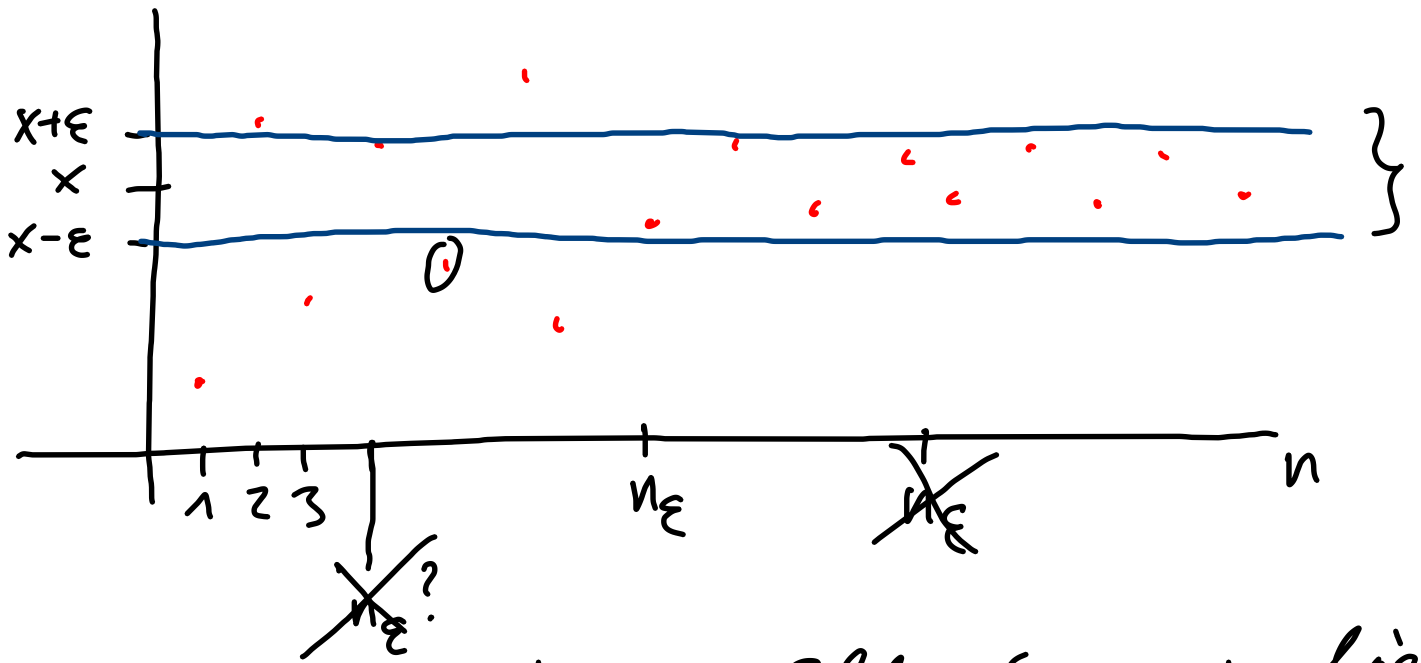
$$\neg \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \, \forall n \geq n_\varepsilon : A(n, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \underline{\exists n \geq n_\varepsilon} : \neg A(n, \varepsilon)$$

Bew Für $\varepsilon = 1$ und bel. vorg. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2^m > n_\varepsilon$,

und dafür $|x_n| \geq 1$ $\square$



$x_n \to x \iff$ In jedem ε-Schlauch um x liegen ab n_ε alle Folgenglieder

$x_n \longrightarrow x \iff$ ~~Be~~ in jedem ε-Schlauch liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder
("fast alle Folgenglieder")
$\iff$ "liegen schließlich alle Folgenglieder"

<u>Begriff</u> Teilfolge von (x_n):
manche Glieder ausgelassen

<u>Bspe</u> $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \ldots)$

$(x_1, x_4, x_9, x_{16}, \ldots)$

<u>Def</u> $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, x_{n_k} = k-ter Term der Teilfolge

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ ("streng wachsend")

Bspe $(x_1, x_3, x_5, \dots) = (x_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$

$n_k = 2k-1$

$(x_1, x_4, x_9, \dots) = (x_{n_k})$ mit $n_k = k^2$

$(x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_{n_k})$ mit $n_k = k+1$

2.17 Proposition

a) Wenn $y_n \to 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}: |x_n| \leq |y_n|$, dann $x_n \to 0$.

Sogar: Wenn $y_n \to 0$ und $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $|x_n| \leq |y_n|$, dann $x_n \to 0$.

Bew Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_ε so, dass 1) $n_\varepsilon \geq N$ und 2) $|y_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

Dann $|x_n| \leq |y_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$, also $x_n \to 0$. $\square$

b) Wenn $x_n \to 0$ und $c \in \mathbb{R}$ dann $(cx_n) \to 0$.

Falls $c=0$: klar. Sei nun $c \neq 0$.

<u>Bew</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_ε so, dass

für (cx_n)

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

"$n_{\varepsilon/|c|}$" für (x_n)

$$\Rightarrow |cx_n| = |c| \cdot |x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$\square$

c) $q^n \to 0$ für $|q| < 1$

$q^n \not\to 0$ für $|q| \geq 1$

<u>Bew</u> $0^n = 0$ klar. Sei $0 < |q| < 1$

Bernoulli-Ungl: $(1+h)^n \geq 1 + nh$ für $h \geq -1$

$$1+h = \frac{1}{|q|} \Leftrightarrow h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh$$

$$\Rightarrow |q^n| < \frac{1}{nh} \xrightarrow[\substack{a) \\ \frac{1}{n} \to 0 \\ b) \frac{1}{nh} \to 0}]{} q^n \to 0$$

Sei $|q| \geq 1$. Dann $|q^n| = |q|^n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Also $q^n \not\to 0$. $\square$

d) Jede Teilfolge einer Nullfolge ist Nullfolge.

Bew Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_ε so, dass $|x_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$.

$n_k \geq k \Rightarrow |x_{n_k}| < \varepsilon \ \forall k \geq n_\varepsilon$. $\square$

e) Wenn $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$, dann

$$x_n \pm y_n \longrightarrow 0 .$$

<u>Bew</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle m_ε so, dass $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq m_\varepsilon$

k_ε so, dass $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq k_\varepsilon$

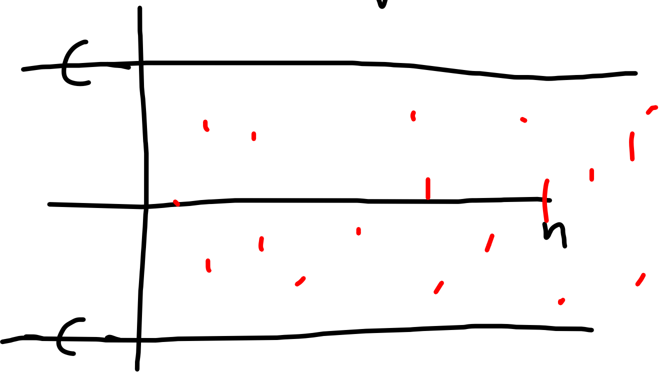
Setze $n_\varepsilon := \max(m_\varepsilon, k_\varepsilon)$. Für $n \geq n_\varepsilon$ gilt $\underline{n \geq m_\varepsilon}$ und $\underline{n \geq k_\varepsilon}$, daher

$$|x_n \pm y_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

f) Sei (y_n) beschränkt, d. h. $\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}: |y_n| \leq c$.

Wenn $x_n \to 0$, dann $x_n y_n \longrightarrow 0$.



Bew Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle n_ε so, dass

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{c} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon$$

(oBdA $c > 0$)

Dann $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq |x_n| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. $\square$

g) Jede Nullfolge ist beschr.

<u>Bew</u> Zu $\varepsilon = 1$ $\exists n_1$: $|x_n| < 1$ $\forall n \geq n_1$.

Also $|x_n| \leq \max\{1, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1 - 1}|\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\square$

h) Wenn $x_n \to 0$, dann $\underline{\sqrt[m]{|x_n|}} \to 0$.
$(m \in \mathbb{N})$

<u>Bew</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_ε so, dass $\underline{|x_n| < \underbrace{\varepsilon^m}_{>0}}$
$\forall n \geq n_\varepsilon$. Dann $\sqrt[m]{|x_n|} < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$.

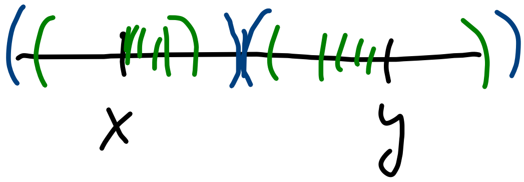
$\square$

2.18 Prop

a) Grenzwerte sind eind.:

Wenn $x_n \to x$ und $x_n \to y$, dann $x = y$.

Bew Wäre $x \neq y$, setze $\varepsilon := \frac{|x-y|}{2}$



Wenn $|x_n - x| < \varepsilon$

und $|x_n - y| < \varepsilon$,

dann wäre $|x - y| = |(x - x_n) + (x_n - y)|$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x - x_n| + |x_n - y|$$

$$= |x_n - x| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ \lightning$$

$\square$

b) Jede konv. Folge ist beschr.

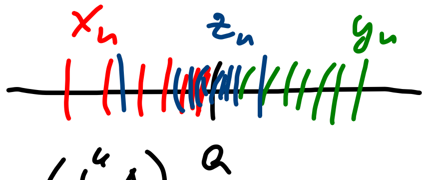
<u>Bew</u> $\underline{|x_n|} = |(x_n - x) + x| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|x_n - x|}_{\text{beschr. weil } x_n - x \to 0} + |x| \leq \underline{c + |x|}$ □

c) Wenn $x_n \to x$, dann $|x_n| \to |x|$

<u>Bew</u> $\big||x_n| - |x|\big| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.} \\ \text{von unten}}}{\leq} \underline{|x_n - x|} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$. □

d) "Dreifolgensatz", "squeeze theorem"

Wenn $x_n \leq y_n \leq z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to a$ und $z_n \to a$, dann $y_n \to a$.



(ÜA)

e) Ist $M \subset \mathbb{R}$ nach ob. beschr. und $s := \sup M$, dann gibt es (x_n) mit $x_n \in M$ und $x_n \to s$.

<u>Bew</u> Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in M$ mit $x_n > s - \frac{1}{n}$

($\exists x_n$, sonst wäre $s - \frac{1}{n}$ schon ob. Schr. an M)

Also $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \overset{d)}{\Longrightarrow} x_n \to s$. $\square$