2.18 Prop

f) Wenn $x_n \to x$, $y_n \to y$, $a, b \in \mathbb{R}$,
dann

$$a x_n + b y_n \longrightarrow a x + b y$$

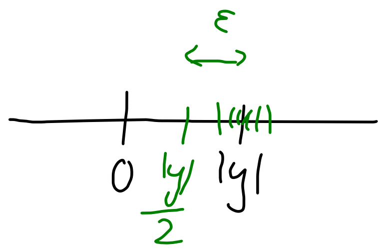
$$x_n y_n \longrightarrow x y$$

$$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{x}{y} \quad \text{falls } y \neq 0.$$

(dann sind fast alle $y_n \neq 0$)

<u>Beweis</u> für die letzte Aussage:

Für n groß genug ist $|y_n| > \frac{1}{2}|y|$
also $y_n \neq 0$.



$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right|$$

$$= \left|\frac{x_n y - xy + xy - y_n x}{y_n y}\right|$$

$$\leq \frac{|x_n y - xy| + |xy - y_n x|}{|y_n y|}$$

$$= \frac{|x_n - x||y| + |x||y_n - y|}{|y_n||y|}$$

$$\leq \frac{|x_n - x||y| + |x||y_n - y|}{(|y|/2)|y|}$$

$$= \frac{2}{|y|}\underline{|x_n - x|} + \frac{2|x|}{|y|^2}\underline{|y_n - y|} \longrightarrow 0$$

$$\underline{\underline{\;\;}}\quad \underbrace{\quad}_{\to 0,\ < \frac{\varepsilon}{C} \text{ für } n > n_\varepsilon} \qquad \underbrace{\quad}_{\to 0,\ < \frac{\varepsilon}{C'} \text{ für } n > n'_\varepsilon}$$

$\square$

g) Jede Teilfolge einer <u>konv. Folge</u> konvergiert gegen denselben Grenzwert,

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} \underline{x_n} .$$

<u>Bew</u> Wähle k_ε so, dass $\underline{n_{k_\varepsilon}} \geq n_\varepsilon$. $\square$

h) Wenn $x_n \to x$, dann $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[m]{|x_n|} \longrightarrow \sqrt[m]{|x|} .$$

<u>Beweisskizze:</u> Falls $x = 0$, 2.17 h.

Falls $x \neq 0$: Trick

$$|a-b| = \frac{|a^m - b^m|}{|a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}|}$$

setze $a = \sqrt[m]{|x_n|}$, $b := \sqrt[m]{|x|}$

beachte $a \geq \frac{b}{2} > 0$ für ~~$\varnothing$~~ n groß genug

… $\square$

2.19 Def Landau-Symbole

$(x_n), (y_n)$ Folgen, $\forall n: y_n > 0$.

a) $(x_n) = \mathcal{O}(y_n)$

$:\Longleftrightarrow \exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq C\,|y_n|$

b) $(x_n) = o(y_n)$

$:\Longleftrightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow 0$.

2.20 Bspe

- $(n!) = \mathcal{O}(n^n)$, denn $n! \leq n^n$ $(C = 1)$
- $(n^2 + n - 1) = \mathcal{O}(n^2)$ $(\underline{C = 2})$ und $o(n^3)$, aber nicht $o(n^2)$.

- Wenn $y_n \to 0$ und $(x_n) = O(y_n)$,

  dann $x_n \to 0$.

- Man schreibt auch $x_n = \underline{n^2 + o(n^2)}$

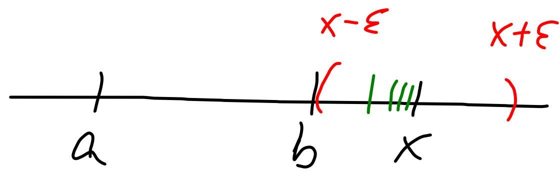
  für $(x_n - n^2) = o(n^2)$

  z.B. $x_n = n^2 + \underline{n - 1}$

Bem Wenn (x_n) konv. und $\underline{\forall n: x_n \in [a,b]}$,

dann $\lim x_n \in [a,b]$.

Beweis Wäre $\lim x_n =: x > b$,



setze $\varepsilon := x - b$, ab n_ε gilt $\underline{|x_n - x| < \varepsilon}$

$\Rightarrow \underline{-\varepsilon < x_n - x} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{x - \varepsilon}_{b} < x_n$ ↯

Ebenso für a. $\square$

2.21 Def

(x_n) wachsend $:\iff$ $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n$

streng wachsend $:\iff$ $x_n < x_{n+1}$

fallend $:\iff$ $x_n \geq x_{n+1}$

streng fallend $:\iff$ $x_n > x_{n+1}$

monoton $:\iff$ wachsend oder fallend

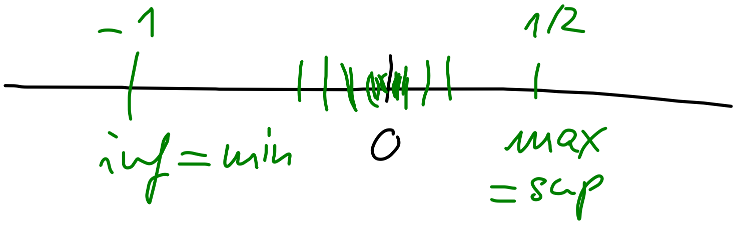
streng monoton $:\iff$ streng wachsend oder streng fallend.

2.22 Satz "Monotonie – Kriterium"

Jede wachsende und nach oben beschr. Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konv. gegen $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: \sup\limits_n x_n$

Jede fallende und nach unten beschr. Folge konv. gegen $\inf\limits_n x_n$.

Bsp $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$



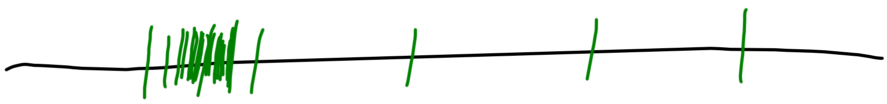
Bew (Satz 2.22) (x_n) wachsend, $x := \sup_n x_n \in \mathbb{R}$ nach ob. beschr.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x$$

wachsend $\Rightarrow x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n \le x \qquad \forall n \ge n_\varepsilon$

$\Longrightarrow$ Konv. $\square$

2.23 Bem Ändern von endlich vielen x_n ändert nichts daran, ob die Folge konv. Daher reicht "Monotonie für n groß genug".



2,24 Bspe

a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (\text{"n-Schritt-Verzinsung"})$$

ab $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > -x\}$ streng wachsend $\longleftarrow$

nach ob. beschr. $\xrightarrow{\text{Mon. Krit}}$ konv.

Bew Wir zeigen $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ für $x \neq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n} \Big/ \left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{\frac{\cancel{xn - x(n+1)}\; -x}{\cancel{n}(n+1)}}{\frac{n+x}{\cancel{n}}} = \frac{-x}{(n+1)(n+x)} =: h > -1$$

denn $x < \underbrace{n+x}_{>0} < (n+1)(n+x)$

Bernoulli-Ungl: $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$ für $h \geq -1$, $h \neq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{\cancel{\in(0,1)}\ >0} \underbrace{\left(1+\cancel{(n+1)}\frac{(-x)}{\cancel{(n+1)}(n+x)}\right)}$$

weil $n > -x$

$$\frac{n+x-x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} = 1. \Rightarrow \text{wachsend.}$$

beschr: (i) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ für $\underline{n > |x|}$

da $$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{x^2}{n^2}}_{\in(0,1)}\right)}_{\in(0,1)}^{n} \underline{< 1}$$

und (ii) $\underline{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} \text{ für } n \text{ groß genug fallend}}$, da Kehrwert $\left(1+\frac{(-x)}{n}\right)^n$ für n groß genug wachsend.

$(i) \& (ii) \Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ beschr. $\square$

<u>Bsp</u> $a_n := \underline{\sqrt[n]{c}} \longrightarrow \underline{1}$ für $c > 0$

<u>Bew</u> ~~Falls~~ $c = 1$ klar

Falls $c > 1$: $\underline{0 < a_n}$ und $a_n^n = c > 1$

also nach unten beschr. $\underline{\Rightarrow a_n > 1}$

fallend: $\underline{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n+1}} = \frac{c}{c a_n} = \frac{1}{a_n} < 1$

Also (Mon. Krit.) $\exists \lim a_n =: a = \inf a_n \geq 1$

Wäre $a > 1$, dann $\left(\frac{1}{a}\right)^n \longrightarrow 0$, daher

wäre $\underline{a^n \text{ unbeschr.}}$

Aber: $\underline{(a^n) \text{ beschr}}$: $\quad 0 < \underline{a < a_n}$ $\quad \leq a_{n+1} < a_n$

$$\Longrightarrow \quad a^n < a_n^n = c \quad ⚡$$

Also $a = 1$.

Analog für $c < 1$. $\square$

$\underline{\text{Bsp}}$ $\quad \underline{a_n := \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1}$

$\underline{\text{Bew}}$ nach unten beschr., weil $a_n \geq 1$. $\forall n$.

fallend: $$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{a)}{\leq} \frac{c}{n} < 1 \text{ für } n \text{ groß genug}$$

Mon. Krit. $\Rightarrow \exists \lim a_n =: a$.

$(a_n = \sqrt[n]{n})$

$$\underline{a} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}$$

$$\overset{!}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}\right)$$

falls $\exists$ Limiten

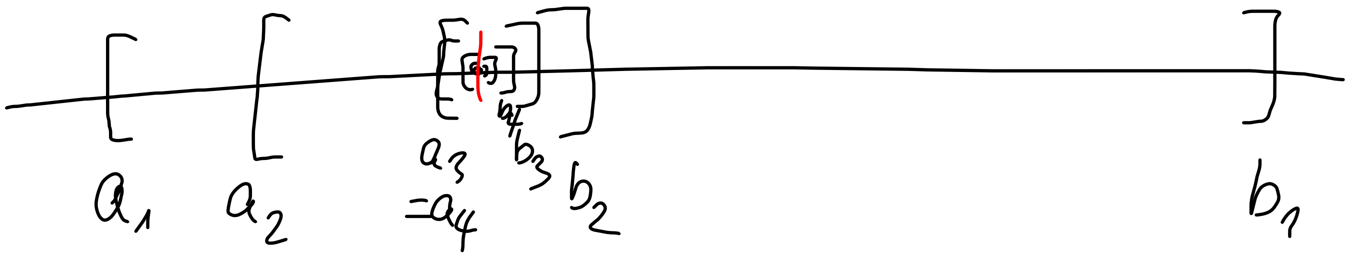
$$= \underbrace{\left(\lim \sqrt[n]{\sqrt{2}}\right)}_{c=\sqrt{2},\ \lim = 1} \underbrace{\left(\lim \sqrt[2]{a_n}\right)}_{=\sqrt[2]{a}} = 1 \cdot \sqrt{a} = \underline{\sqrt{a}}$$

$a = \sqrt{a} \Rightarrow a^2 = a$ entweder $a = 0$

oder (dividiere durch a)

Wg. $a_n \geq 1$ kommt nur $a = 1$ in Frage. $a = 1$. $\square$

2.25 Def Eine <u>Intervallschachtelung</u> ist eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n \longrightarrow 0$.



2.26 Satz "Intervallschachtelungsprinzip"

$\forall$ Intervallschachtelung $\left([a_n, b_n]\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$\exists_1\, x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad x \in [a_n, b_n]$.

Tatsächlich $\lim a_n = x = \lim b_n$.

Bew 1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

$\Longrightarrow$ (a_n) wachsend

(b_n) fallend

2) $\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad a_n < b_m$

denn: Falls $n = m$ klar

Falls $n < m$: $\quad a_n \leq a_m < b_m$

Falls $n > m$: $\quad a_n < b_n \leq b_m$

3) Also ist (a_n) nach ob. beschr.

(b_n) — unten beschr

Mon. Krit $\Rightarrow$ $\exists \lim a_n =: a = \sup a_n$

$\exists \lim b_n =: b = \inf b_n$

und $a \leq b$ wg 2)

4) Wg. $a_n \leq a$ und $b_n \geq b$ gilt

$0 \leq b - a \leq \underbrace{b_n - a_n}_{\to 0}$ also (2.17c) $b - a = 0$ also $b = a$.

und $x := a = b$

$\Rightarrow a_n \leq x \leq b_n$, also $x \in [a_n, b_n]$

5) Eind. $\forall \tilde{x} < x \ \exists n: a_n > \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} \notin [a_n, b_n]$

(weil $x = \sup a_n$)

$\forall \tilde{x} > x \ \exists n: b_n < \tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} \notin [a_n, b_n]$

(weil $x = \inf b_n$)

$\square$