Dezimalbruchentwicklung

$3{,}14159265\ldots$

Achtung: $\quad 0{,}25000000\ldots$

$\quad = 0{,}24999999\ldots$

Für $x > 0$

<u>Def</u>

$$x_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\}$$

$$x_1 = \max\{k \in \{0,1,\ldots,9\} \mid x_0 + 10^{-1} \cdot k < x\}$$

$$x_2 = \max\{k \in \{0..9\} \mid x_0 + 10^{-1} \cdot x_1 + 10^{-2} k < x\}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \max\{k \in \{0\ldots9\} \mid x_0 + 10^{-1} x_1 + \ldots + 10^{-(n-1)} x_{n-1} + 10^{-n} \cdot k \leq x\}$$

(x_n) Folge in $\{0, \dots, 9\}$

Beh endet nie auf lauter 0en,
d.h. stets ∞ oft $x_n \neq 0$.

Bew wäre $x_n = 0 \quad \forall n > N$,

dann $\forall n > N$: $\quad x_0 + x_1 \cdot 10^{-1} + \dots \underline{+ x_n \cdot 10^{-n}}$

$$= x_0 + x_1 \cdot 10^{-1} + \dots + x_N \cdot 10^{-N} =: y \leq x$$

aber wg $\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$ gilt $\exists \hat{n}: \; 10^{-\hat{n}} < x - y$

$\Rightarrow y + 10^{-\hat{n}} < x$ ↯ zu $x_n = 0 \;\; \forall n > N$. □

2.27 Korollar zum Intervallschachtelungsprinzip

Zu jeder Ziffernfolge $(x_1, x_2, \ldots)$, $x_n \in \{0, \ldots, 9\}$ mit ∞ oft $x_n \neq 0$ $\exists_1 x \in (0,1]$, die (x_n) als Dezimalentwicklung hat.

Bew Intervallschachtelung

$$a_n := x_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + x_n \cdot 10^{-n}, \quad b_n := a_n + 10^{-n}$$

beachte $b_n - a_n = 10^{-n} \longrightarrow 0$. also $([a_n, b_n])$ ist I.S.

I.S.P. $\Rightarrow \exists_1 x \in [0,1] : \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}$,

also $a_n \leq x \leq b_n$.

Da ∞ oft $x_n \neq 0$, ist $a_n < \sup a_n = x$, also ist (x_n) = Dezimalentw. von x. $\square$

2.28 Bem Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

b-adische Entwicklung

(dyadisch, triadisch, ...)

$$x = x_0 + x_1 \cdot b^{-1} + x_2 \cdot b^{-2} + \dots$$

$$x_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$$

Bsp $b=2$: $3 = 11_2$

$1 = 0{,}11\,1111\dots$

$(1 = 1{,}00\,0000\dots)$

$\frac{1}{2} = 0{,}0111\,1111\dots$

$(\frac{1}{2} = 0{,}10000\dots)$

$\frac{1}{3} = 0{,}01010101\dots$

2.29 Def Eine Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ heißt <u>Cauchyfolge</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \underline{\forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon}$$

$$\left(\text{konv.} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \quad \underline{|x_n - x| < \varepsilon}\right)$$

2.30 Bem konv $\Rightarrow$ Cauchyfolge

Bew Wähle n_ε so, dass $\underline{|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

Dann $\underline{\forall n, m \geq n_\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq \underbrace{|x_n - x|} + \underbrace{|x - x_m|} \\ &< \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

2.31 Satz "Konvergenzkriterium von Cauchy"

Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bew später

2.32 Bem Supremumsaxiom

$\iff \begin{cases} \text{Archimedische Eigenschaft \&} \\ \text{Cauchykriterium} \end{cases}$

Bem Eine Menge M mit einer Abstandsfunktion $d: M \times M \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ nennt man <u>vollständig</u>, wenn darin jede Cauchyfolge konvergiert (ersetze $|x-y|$ durch $d(x,y)$).

⚠ nicht äquivalent zu "vollst. ang. Kö."

2.33 Lemma Jede Cauchyfolge ist beschr.

Bew Sei (x_n) C.F., $\varepsilon = 1$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n| = |x_n - x_{n_\varepsilon} + x_{n_\varepsilon}|$$

$$\leq \underbrace{|x_n - x_{n_\varepsilon}|} + |x_{n_\varepsilon}|$$

$$\overset{C.F.}{\leq} 1 + |x_{n_\varepsilon}|$$

Daher $\forall n \in \mathbb{N}$: $|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_\varepsilon - 1}|, 1 + |x_{n_\varepsilon}|\}$

$\square$

2.34 Def $x \in \mathbb{R}$ heißt ein Häufungspunkt der Folge (x_n), falls $\exists$ Teilfolge, die gegen x konv.

2.35 Bspe a) $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots) = \left((-1)^n\right)$ konv. nicht, hat H.P.e -1 und 1.

b) Falls $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, dann ist x ein HP, und zwar der einzige, weil (2.18g) $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$.

c) $(x_n) = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$

Jedes $m \in \mathbb{N}$ ist HP.

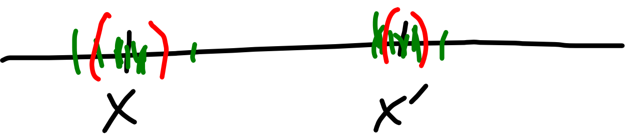
d) $(x_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$

hat keinen HP.

Denn: jede Teilfolge ist unbeschränkt.

2.36 Bem

x ist HP von (x_n) $\Longleftrightarrow$ in jeder ε-Umgebung von x liegen ∞ viele Folgenglieder. (Bew: ÜA)



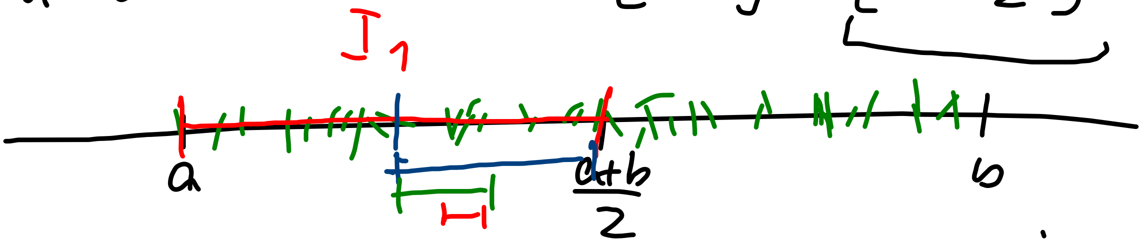
$x_n \longrightarrow x$ $\Longleftrightarrow$ in jeder ε-Umg. von x liegen fast alle Folgenglieder.

2.37 Satz von Bolzano und Weierstraß

Jede beschr. Folge in $\mathbb{R}$ hat mind. 1 HP.

<u>Bew</u> (x_n) beschr. $\Longrightarrow \exists [a,b]\ \forall n: x_n \in [a,b]$.

Halbiere Intervall: $[a,b] = \underbrace{\left[a, \frac{a+b}{2}\right]}_{} \cup \underbrace{\left[\frac{a+b}{2}, b\right]}_{}$



Mind. eine der Hälften enthält ∞ viele x_n, sagen wir I_1, setze $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I_1\}$.

<u>Iteration:</u> Halbiere I_k. Eine Hälfte, sagen wir I_{k+1}, enthält ∞ viele Folgenglieder, setze $n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I_{k+1}, n > n_k\}$

(I_k) ist Intervallschachtelung

I.S.P $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{x\}$

$x_{n_k} \in I_k \implies x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x.$ $\square$

→ Beweis des Cauchy-Kriteriums

Sei (x_n) C.F., Lemma ⇒ beschr.

→ Bolzano-Weierstraß ⇒ $\exists$ HP x.

Beh $x_n \to x$

Bew Sei $\varepsilon > 0$. CF $\implies \exists n_\varepsilon : \forall n, m \geq n_\varepsilon$:

$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \implies \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}: n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$

und $|x_{n_{k_\varepsilon}} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |x_n - x| = |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}} + x_{n_{k_\varepsilon}} - x|$$
$$\leq \underbrace{|x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_{k_\varepsilon}} - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \qquad \square$$

2.38 Def Ist (x_n) nicht konv., dann heißt sie *divergent*.

Wenn $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_M : x_n \geq M$

dann heißt sie *bestimmt divergent gegen ∞*,

$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$.

bestimmt divergent gegen $-\infty$

$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ falls $x_n \leq M$

2.39 Bsp. • $\lim_{n \to \infty} n = \infty$

• $((-1)^n)$ ist unbestimmt divergent.