2.3 Mengen und Abbildungen

2.40 Def Die Menge M heißt <u>endlich</u>, falls sie endlich viele El.e enthält, $\# M = |M| \in \mathbb{N}_0$

2.42 Def Für $f : M \longrightarrow N$ heißt

M = Definitionsbereich oder Urbildbereich von f

N = Zielmenge von f

$$\mathrm{Bild}(f) = \underbrace{\{ f(x) \mid x \in M \}}_{= \text{ das Bild von } f} \subset N$$

<u>Notation</u> $x \longmapsto f(x)$

z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$x \longmapsto x^2$$

<u>Def</u> (Nicolas Bourbaki 1939)

$f : M \to N$ heißt <u>injektiv</u>,

falls jeder Wert $y \in N$ höchstens

einmal angenommen wird.

($\Longleftrightarrow$ wenn $f(x) = f(x')$, dann $x = x'$

$\Longleftrightarrow$ wenn $x \neq x'$, dann $f(x) \neq f(x')$).

$f: M \to N$ heißt <u>surjektiv</u>, falls jeder Wert $y \in N$ mindestens einmal angenommen wird

$$\left(\Leftrightarrow \forall y \in N \; \exists x \in M : \; f(x) = y \right.$$
$$\left. \Leftrightarrow \mathrm{Bild}(f) = N. \right)$$

⚠ Das hängt von der angegebenen Zielmenge ab.

$f: M \to N$ heißt <u>bijektiv</u>, falls sie injektiv und surj. ist

($\Leftrightarrow$ jeder Wert $y \in N$ wird genau einmal angenommen)

2.43 Bspe a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) := z^2$.

nicht inj, weil $f(1) = f(-1)$

nicht surj, weil $2 \notin \mathrm{Bild}(f)$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$

inj., weil $n^2 = m^2$ nur dann gilt, wenn $n = m$.

nicht surj, weil $2 \notin \mathrm{Bild}(f)$.

c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = -z$

ist bij.; inj., weil wenn $-z = -w$, dann $z = w$

surj., weil $\forall z \in \mathbb{Z}: \ z = f(-z)$.

Terminologie Injektion, Surjektion, Bijektion

2.44 Bem Eine <u>Umkehrabbildung</u>

von $f: M \to N$ ist eine Abb.

$f^{-1}: N \to M$ mit

$\forall x \in M: \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$\forall y \in N: \quad f(f^{-1}(y)) = y$

Eine Umkehrabb. ex. genau dann, wenn f bij. ist. In diesem Fall ist sie eind. best.

Man schreibt $f \circ g$ für die Verkettung oder Komposition $x \longmapsto f(g(x))$ von $f: M \to N$ und $g: K \to L$, wobei $L \subset M$.

Also $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_N & \text{und} \\ f^{-1} \circ f = id_M \end{cases}$

$id_N : N \to N, \quad x \longmapsto x$
„identische Abb."

2.45 Def Mengen M, N heißen gleichmächtig

$|M| = |N|$, falls es eine Bij $f: M \to N$ gibt.
Falls M endlich, so ist N genau dann gleichmächtig zu M, wenn N endlich ist und gleich viele El.e enthält wie M. $(|M| = |N|)$

2.46 Bsp Eine unendl. Menge kann gleichmächtig sein zu einer echten Teilmenge, z.B. $\mathbb{N}$ zu $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ ist Bij. Bsp: Hilberts Hotel.

2.47 Def • M heißt **abzählbar unendlich**,

falls $|M| = |\mathbb{N}| =: \aleph_0$ Aleph$_0$

d.h. falls $\exists$ Bij $f: M \to \mathbb{N}$

• M heißt **abzählbar**, falls $|M| = |\mathbb{N}|$ oder $|M| \in \mathbb{N}_0$,

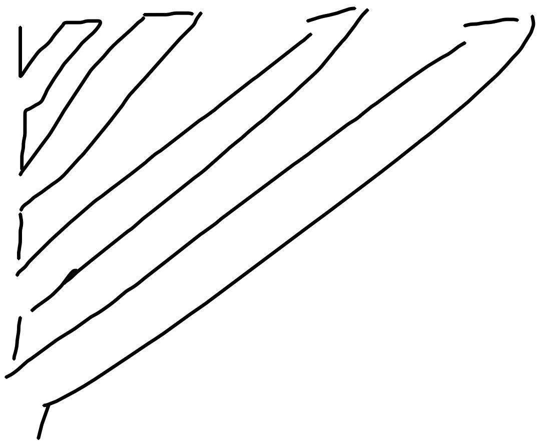
sonst **überabzählbar**.

Bem M abzb. $\iff$ $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ oder $M = \emptyset$

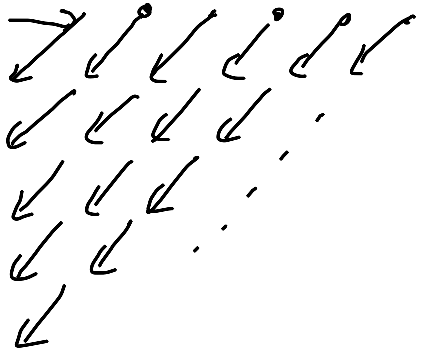
2.48 Satz $\mathbb{Q}$ ist abzb.

Beweis Cantors Diagonaltrick Nr. 1

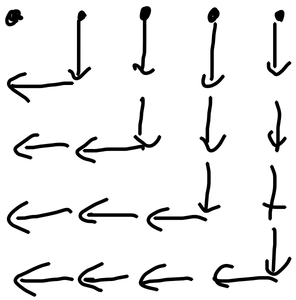
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	
$\vdots$					



oder



oder



lasse kürzbare Brüche weg

$\Rightarrow$ Folge $(q_1, q_2, q_3, \dots)$

Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,\infty)$

$(0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (a,b)

$$\Rightarrow \quad (0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \dots)$$

Abz. von $\mathbb{Q}$. $\square$

2.49 Satz Die Vereinigung abzb. vieler abzb.er Mengen ist abzb.

$$M = \bigcup_{k \in K} M_k \,.$$

M_k abzb.
K abzb.
$\Downarrow$
M abzb.

Beweis

$$M_{k_1} = \{ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots \}$$

$$M_{k_2} = \{ x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \dots \}$$

$$M_{k_3} = \{ x_{31}, x_{32}, \dots \dots \} \quad \square$$

2.50 Satz $\mathbb{R}$ ist überabzb.

Bew Cantors Diagonaltrick Nr. 2 für $(0,1) \subset \mathbb{R}$

Wäre $(0,1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, Dezimaldarst.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}\, x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ \ldots\ldots \\
x_2 &= 0{,}\, x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ \ldots \\
x_3 &= 0{,}\, x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{34}\ \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$y := 0{,}\, y_1\ y_2\ y_3\ \ldots\ldots$$

$$y_1 \neq x_{11} \qquad \text{nämlich z.B.}$$
$$y_2 \neq x_{22} \qquad y_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x_{nn} = 1 \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$y_n \neq x_{nn}$$

$$\Longrightarrow \quad y \notin \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$y \in (0,1) \qquad \lightning \qquad \square$$

2.51 Bem Cantors Kontinuumshypothese (1878)

$$\forall M \subset \mathbb{R}: \ |M| < \infty \text{ oder } |M| = |\mathbb{N}| \text{ oder } |M| = |\mathbb{R}|.$$

Kurt Gödel (1938): $ZF \not\Rightarrow \neg CH$ $\qquad$ ZF = Zermelo-Fraenkel Axiomensystem der Mengenlehre

Paul Cohen (1960): $ZF \not\Rightarrow CH$

Kap. 3: Elementare Fktnen und Stetigkeit

3.1 Exponentialfkt

Def $\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ex. nach 2.24a), später: $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3.1 Satz a) $\exp(0) = 1$

b) $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$ "multiplikativ"
"Funktionalgl."

Bew a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$.

b) $\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

$$= \lim \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n - \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}_{u}{}^n - \underbrace{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\cancel{n}}\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]}_{v}{}^n\right]$$

Trick: $u^n - v^n = (u-v)\sum_{k=1}^{n} u^{n-k} v^{k-1}$

Hier: $v = 1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}$, $u - v = -\frac{xy}{n^2}$

Also $a_n = u^n - v^n = -\frac{xy}{n^2} \sum_{k=1}^{n} u^{n-k} v^{k-1}$

Zu zeigen: $a_n \longrightarrow 0$.

$$|v| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right| = \overbrace{\left|1+\frac{x}{n}\right|}^{\Delta\text{-Ungl} \,\le\, 1+\frac{|x|}{n}} \left|1+\frac{y}{n}\right|$$

$$\le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)\left(1+\frac{|y|}{n}\right)$$

$$|u| = \left|1+\frac{x+y}{n}\right| \le 1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|y|}{n}$$

$$\le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)\left(1+\frac{|y|}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \left|u^{n-k} v^{k-1}\right| = |u|^{n-k} |v|^{k-1} \le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{|y|}{n}\right)^{n-1}$$

$$\le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{|y|}{n}\right)^{n} \le \exp(|x|)\exp(|y|)$$

Also $|a_n| \leq \frac{|x||y|}{n^2} \; n \; \exp(|x|) \exp(|y|)$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{n} \longrightarrow 0. \qquad \square$$