Def $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

3.1 Satz

a) $\exp(0) = 1$

b) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

3.2 Folgerungen

i) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

ii) $\exp(x) > 0$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \exp(x)$

Bew i) b) für $y = -x$

$1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x) \Rightarrow$ Beh.

ii) $\exp(x) \neq 0$ wg. i)

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

iii) $$\underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}_{y_n} \xrightarrow{n \to \infty} \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\lim y_n} = \exp(x)$$ $\square$

<u>Def</u> Eulersche Zahl $e = \exp(1) \approx 2{,}71828\ldots$

<u>3.2 Satz</u> $\forall \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}: \exp\left(\frac{q}{p}\right) = \sqrt[p]{e^q} = \left(\sqrt[p]{e}\right)^q$

Bew: ÜA (Blatt 6)

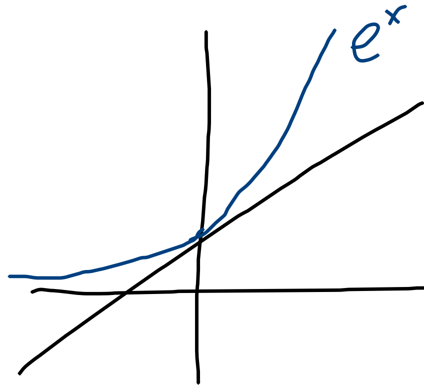
<u>Def</u> $\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x := \exp(x)$ $\quad \left(\begin{array}{l} a^b \text{ später} \\ a > 0 \end{array}\right)$

3.3 Satz

a) $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $e^x > 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

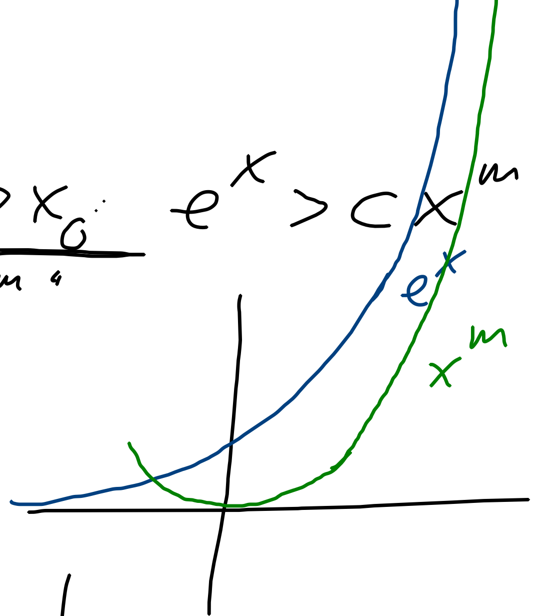


d) wenn $x < y$, dann $e^x < e^y$

"exp ist streng wachsend"

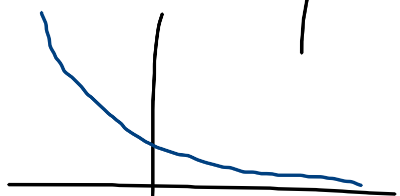
e) $\forall m \in \mathbb{N} \ \forall c > 0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ \forall x > x_0: \quad e^x > c x^m$

"e^x wächst schneller als x^m"



f) $\forall m \in \mathbb{N} \ \forall c > 0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ \forall x > x_0:$

$$e^{-x} < c x^{-m}$$



d.h. $e^{-x} = O(x^{-m})$

für $x \to \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$

g) Für $|x| < 1$ gilt $|e^x - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$

h) $e^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $e^{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

<u>Bew</u> c) Wir wissen: $n \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ streng wachsend für $n > -x$, $x \neq 0$

also für $x > -1$: $\quad n > -x \ \forall n$

$$\underline{1+x} = \left(1+\frac{x}{1}\right)^1 \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underline{< e^x}$$

für $x \le -1$: $\quad 1+x \le 0 < e^x$.

d) $$e^y - e^x = e^x e^{y-x} - e^x = \underbrace{e^x}_{>0}\big(\underbrace{e^{y-x}}_{>1 \text{ für } y>x} - 1\big)$$

denn c) $\Rightarrow e^{\alpha} > 1 \ \forall \alpha > 0$

e) Zunächst $e^x > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \overset{x>0}{>} \left(\frac{x}{m}\right)^m = m^{-m} x^{+m}$

$m > -x$

deshalb $e^x > \left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m} > (2m)^{-2m} x^{2m}$

$= \left(\frac{x}{(2m)^2}\right)^m x^m$

wähle $x > 4m^2 \sqrt[m]{c}$.

f) $\Leftarrow$ e)

g) Für $0 \le x < 1$ gilt $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} e^x$ fallend

also $e^x \le \frac{1}{1-x} \Rightarrow 0 \le e^x - 1 \le \frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} = \frac{x}{1-x} = \frac{|x|}{1-|x|}$

Für $-1 < x < 0$ gilt $e^x > 1+x$ (c)

$\Rightarrow 0 < 1 - e^x \le -x = |x| \le \frac{|x|}{1-|x|}$, also $|e^x - 1| = |1-e^x| = 1-e^x \le \frac{|x|}{1-|x|}$.

h) Aus e) für $m=1$, $C=1$ folgt $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 : \underline{e^n > n}$, also $e^n \longrightarrow \infty$.

Entspr. $0 < e^{-n} < \frac{1}{n} \Longrightarrow e^{-n} \longrightarrow 0$. $\square$

<u>3.4 Def</u> $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt

<u>wachsend</u> $\Longleftrightarrow$ wenn $x<y$, dann $f(x) \leq f(y)$

<u>streng wachsend</u> $\Longleftrightarrow$ wenn $x<y$, dann $\underline{f(x) < f(y)}$

<u>3.5 Bem</u> Streng monotone Fktnen sind inj.

<u>Bew</u> Sei $\underline{f(x) = f(y)}$. Zu zeigen: $x=y$.

Wäre $x<y$, dann $f(x) < f(y)$ ↯

Wäre $x>y$, dann $f(x) > f(y)$ ↯ Also $x=y$ $\square$

Also ist $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ inj.

Auch surj? Wissen: $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^{n} = \infty$$

Gibt es Lücken dazwischen?

3.6 Def $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$

heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

f heißt stetig, wenn sie in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

3.7 Bem stetig $\Longleftrightarrow$ $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$

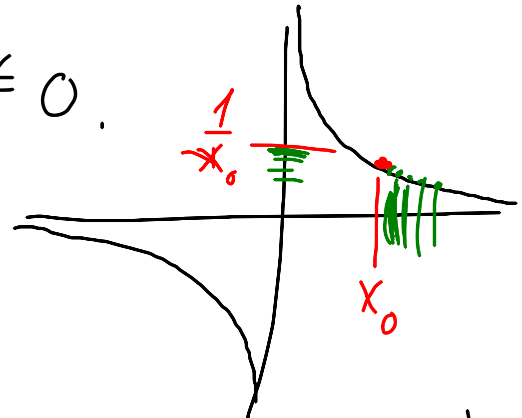
immer wenn $\exists \lim x_n \in D$.

3.8 Bspe a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

ist stetig, da

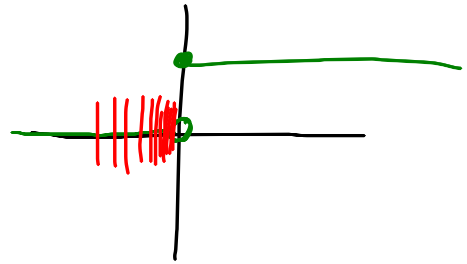
$$\frac{1}{\lim x_n} = \frac{\lim 1}{\lim x_n} = \lim \frac{1}{x_n}$$

wenn $\exists \lim x_n \neq 0$.



b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

"$g(x) = 1_{x \geq 0}$" "charakteristische Fkt der Menge $[0, \infty)$"



ist nicht stetig in 0

$$x_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$g(x_n) = 0 \longrightarrow 0$$

$$g(\lim x_n) = g(0) = 1 \neq 0.$$

$$\underbrace{\lim g(x_n)}_{0} \neq \underbrace{g(\lim x_n)}_{1}$$

Sprungstelle

3.9 Satz exp ist stetig.

Bew Sei $x_n \to x_0$. Sobald $|x_n - x_0| < 1$,

gilt $|e^{x_n} - e^{x_0}| = |e^{x_0}(e^{x_n - x_0} - 1)|$

$$= e^{x_0} |e^{x_n - x_0} - 1| \leq e^{x_0} \frac{|x_n - x_0|}{1 - |x_n - x_0|} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{x_n} - e^{x_0} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{x_n} \longrightarrow e^{x_0} \qquad \square$$

3.10 Zwischenwertsatz

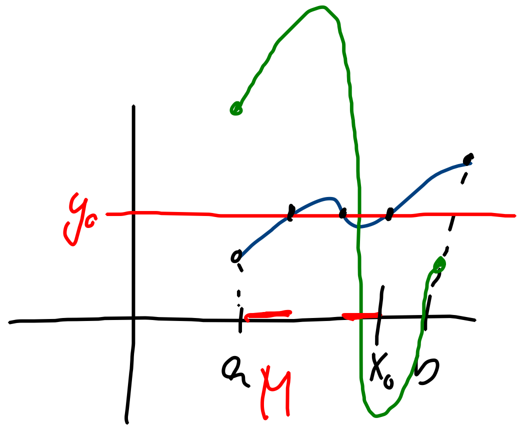
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,

$f(a) < f(b)$

$\forall y_0 \in (f(a), f(b)) \; \exists x_0 \in (a,b)$:

$f(x_0) = y_0$.

Entspr. wenn $f(a) > f(b)$.



Beweis Sei $f(a) < y_0 < f(b)$. Setze

$$M = \{ x \in [a,b] \mid f(x) < y_0 \}$$

$M \neq \emptyset$ wg. $a \in M$, b ist ob. Schr. $\Rightarrow \exists\, x_0 := \sup M$

$\exists (x_n)$ in $M \subset [a,b]$ mit $x_n \to x_0$

f stetig $\Rightarrow$ $f(x_0) = \lim f(x_n) \leq y_0$

weil $f(x_n) < y_0$.

Zu zeigen: $f(x_0) \geq y_0$

$x_0 \neq b$, weil $f(b) > y_0$. $\tilde{x}_n := x_0 + \frac{1}{n} \notin M$

und $\tilde{x}_n \in [a,b]$ für n groß genug, $f(\tilde{x}_n) \geq y_0$

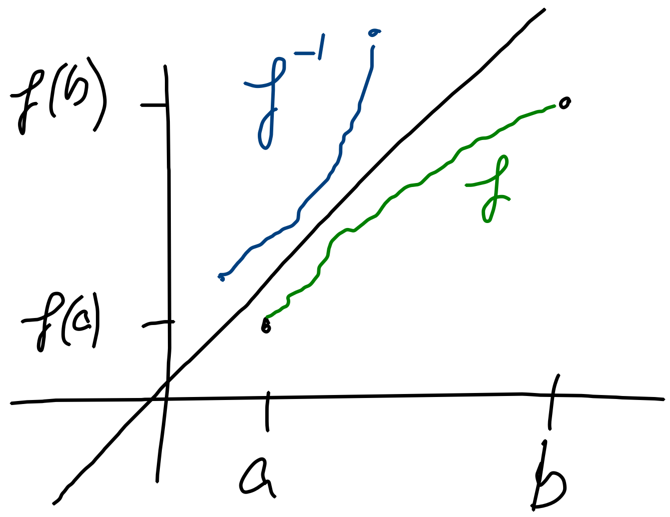
f stetig $\rightarrow$ $\underline{\underline{f(x_0)}} = \lim f(\tilde{x}_n) \underline{\underline{\geq y_0}}$

weil $f(\tilde{x}_n) \geq y_0$ $\square$

<u>Folgerung</u> $\exp : \cancel{\text{ist}}\ \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist surj., bij.

<u>3.11 Satz über f^{-1}</u>

Sei $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng wachsend. Dann bildet f $[a,b]$ bij. auf $[f(a), f(b)]$ ab. $f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$ ist stetig und streng wachsend. (Entspr. für streng fallend.)


$f(b)$
$f(a)$
f^{-1}
f
a
b