3.11 Satz über f^{-1}

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und str. wachsend.

Dann ~~f~~ bildet $f : [a,b]$ bij auf $[f(a), f(b)]$ ab, und

$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$

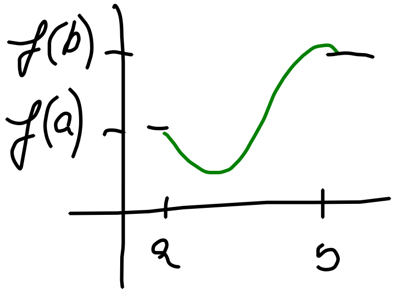
ist stetig und str. wachsend.

Bew str. w. $\Rightarrow$

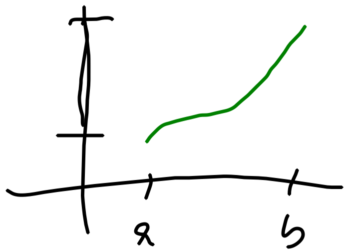
wenn $a < x < b$, dann

$$f(a) < f(x) < f(b),$$

also $\text{Bild } f \subset [f(a), f(b)]$



vs.



$$\text{ZWS} \Longrightarrow \text{Bild } f = [f(a), f(b)]$$

f inj., also $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bij.

also $\exists f^{-1}$

Beh f^{-1} ist str. wachsend

Denn Wenn $f(x) < f(y)$, dann

kann weder $x = y$ sein

noch $x > y$, also $x < y$.

Beh f^{-1} stetig in $y_0 \in [f(a), f(b)]$

Für $y_0 \neq f(b)$

$\left(f^{-1}\left(y_0 + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend und

nach unten beschr.

durch $f^{-1}(y_0)$

$\xRightarrow{\text{Mon. Krit}}$ $f^{-1}\left(y_0 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow x_0 \in [a, b]$

f stetig $\quad f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f\left(f^{-1}\left(y_0 + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} y_0 + \frac{1}{n} = y_0$

Für $y_0 \neq f(a)$

Ebenso $f^{-1}\left(y_0 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \tilde{x}_0$

mit $f(\tilde{x}_0) = y_0$, also $\tilde{x}_0 = x_0$.

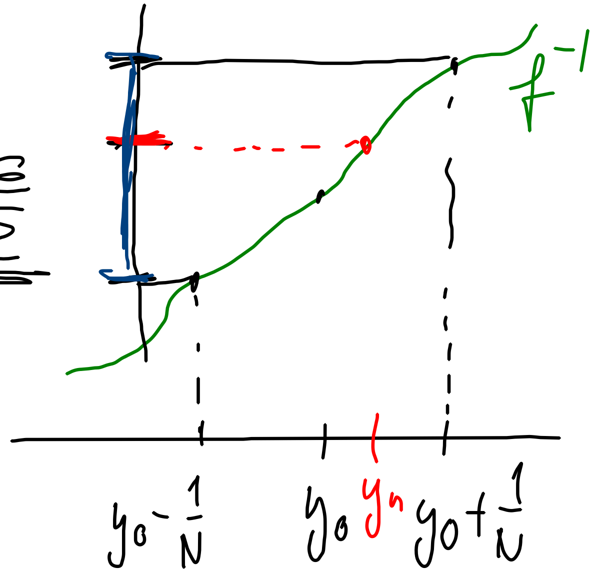
Sei nun (y_n) in $[f(a), f(b)]$ bel. mit $y_n \to y_0$

Zu zeigen: $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y_0)$.

Wissen: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N': |y_n - y_0| < \frac{1}{N}$

Außerdem $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$0 < f^{-1}(y_0) - f^{-1}\left(y_0 - \frac{1}{N}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$



und $$0 < f^{-1}\left(y_0 + \frac{1}{N}\right) - f^{-1}(y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

also $\forall n \geq N'$: $\left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)\right| \leq \left|f^{-1}\left(y_0 + \frac{1}{N}\right) - f^{-1}\left(y_0 - \frac{1}{N}\right)\right|$

$$= \left| f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right) - f^{-1}\left(y_0 - \tfrac{1}{N}\right) \right|$$

$$\leq \left| f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right) - f^{-1}(y_0) \right| + \left| f^{-1}(y_0) - f^{-1}\left(y_0 - \tfrac{1}{N}\right) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

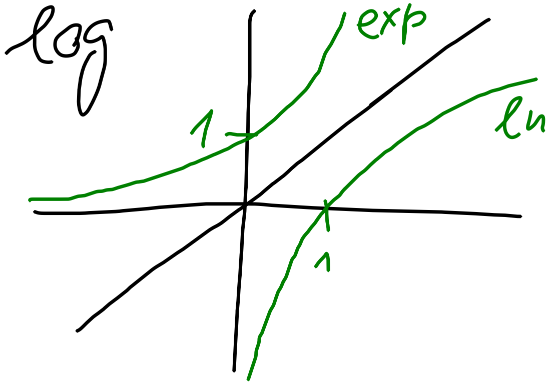
3.12 Korollar und Def

$f := \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bij und stetig

$f^{-1} =$ natürlicher Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

log

ist str. wachsend und stetig



Bew Wissen: exp str. w. $\Rightarrow$ inj.

$e^{n} \to \infty$, $e^{-n} \to 0$, daher

$\forall y_0 \in (0,\infty)\ \exists n_+, n_- \in \mathbb{N}: e^{-n_-} < y_0 < e^{n_+}$

ZWS $\Rightarrow \exists x_0 \in (-n_-, n_+): e^{x_0} = y_0$.

also exp surj auf $(0,\infty)$.

Satz 3.11 $\Rightarrow f^{-1}$ ist auf jedem $[a,b] \subset (0,\infty)$ stetig und str. wachsend

$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}}_{=\ln}$ ist auf $(0,\infty)$ stetig und str. wachsend.

$\square$

3.13 Korollar

a) $e^{\ln y} = y \quad \forall y > 0$

$\ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$

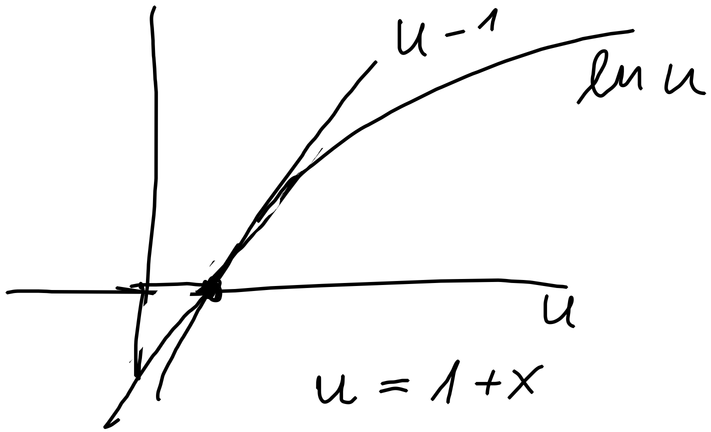
b) $\forall a, b > 0: \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b \Leftarrow$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

c) $\forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \quad \ln(x^n) = n \ln x$

d) $\forall x > -1$ mit $x \neq 0$:

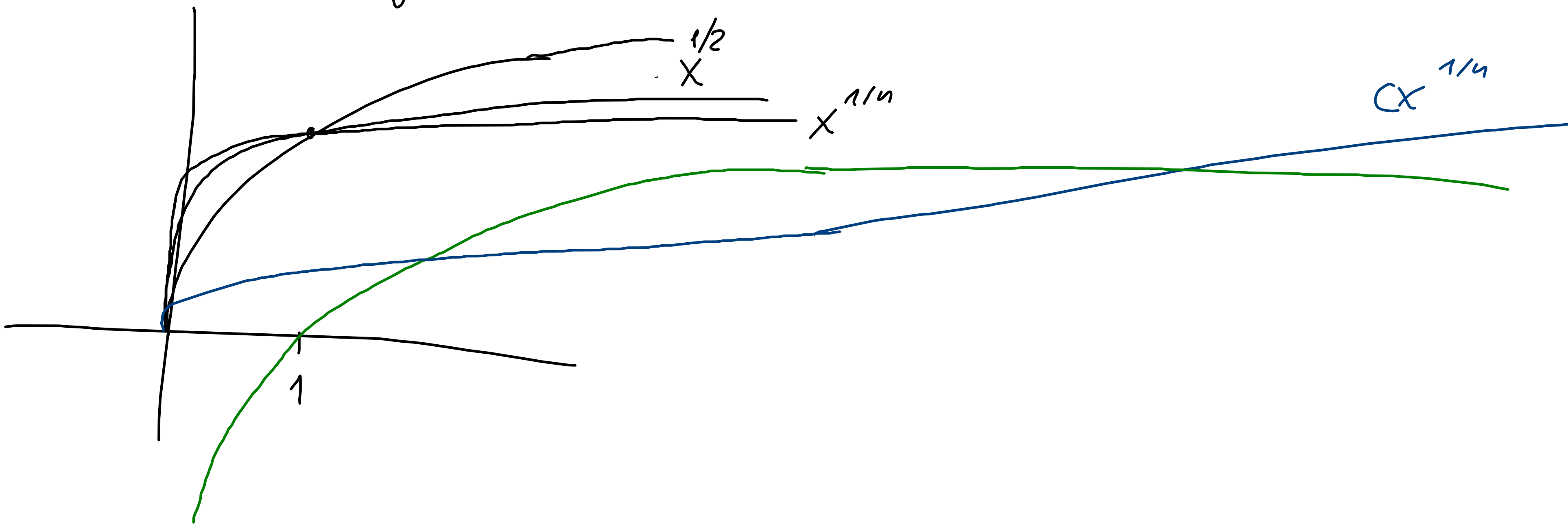
$\ln(1+x) < x$



e) $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall c > 0 \; \exists x_0 \in (0,\infty) \; \forall x > x_0 :$

$$\ln x < c\, x^{1/n}$$

"ln wächst langsamer als ~~jede~~ jeder Wurzel"



f) $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall c > 0 \; \exists x_0 \in (0,\infty) \; \forall x < x_0 :$

$$\ln x > -c\, x^{-1/n}$$

<u>Bew</u> a) – d) folgen leicht aus Satz 3.1 und 3.3

e) ln str. W., daher

$$\underline{\ln x < c x^{1/n}} \iff x < e^{\overbrace{(c x^{1/n})}^{=:y}}$$

$$\iff \left(\frac{y}{c}\right)^n < e^y$$

$$\iff \frac{1}{c^n} y^n < e^y \quad \text{ab } y_0$$

$$y = c x^{1/n}$$

$$\iff \frac{y}{c} = x^{1/n}$$

$$\implies \left(\frac{y}{c}\right)^n = x^{n/n} = x$$

$$\text{ab } x_0 = \left(\frac{y_0}{c}\right)^n$$

f) Entspr.

$\square$

3.14 Def und Satz (reelle Exponenten)

$\forall x > 0 \; \forall y \in \mathbb{R}: \qquad x^y := e^{y \ln x}$

$$\left(\begin{array}{l} x = e^{\ln x} \\ x^y = (e^{\ln x})^y = e^{(\ln x) y} = e^{y \ln x} \end{array} \right)$$

Für $y \in \mathbb{Q}$ stimmt das mit $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$ überein.

$\forall x, y > 0 \; \forall r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(xy)^r = x^r y^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^{r+s} = x^r x^s,$$

$$x^0 = 1, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}. \qquad \text{(Bew ausgelassen).}$$

<u>Bem</u> Für $x<0$ wird x^y üblicherweise nur für $y \in \mathbb{Z}$ definiert.

Man schreibt <u>nicht</u> "$\sqrt[3]{-8} = -2$"

Die Umkehrfkt von $x \mapsto x^3$ ist

$$y \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y>0 \\ 0 & \text{für } y=0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y<0 \end{cases}$$

Für $x=0$ ist x^y nur für $y \geq 0$ definiert: $0^y = \begin{cases} 1 & \text{für } y=0 \\ 0 & \text{für } y>0. \end{cases}$

3.15 Bem $\log_a$ ist Umkehrfkt zu

$$x \mapsto a^x \quad (a > 1)$$

$$\log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a}, \quad \text{denn wenn } y = a^x,$$

$$\text{dann } \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{\ln a^x}{\ln a} = \frac{\ln e^{x \ln a}}{\ln a}$$

$$= \frac{x \ln a}{\ln a} = x.$$

Kap. 3.2 Polynome und rationale Fktnen

Monom $x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}_0$

Polynom $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

a_j = Koeffizienten

Sei $a_n \neq 0 \Rightarrow n =:$ Grad des Polynoms

$\text{Grad}(a_0) = 0$, grad (0) nicht definiert.

<u>Bem</u> Wenn f, g Poly sind, dann auch $f+g$, cf $\forall c \in \mathbb{R}$, fg und $f \circ g$; nicht jedoch im allg. $\frac{f}{g}$ ("rationale Fkt")

$\text{Grad}(f+g) \leq \max\{\text{Grad}(f), \text{Grad}(g)\}$

$\text{Grad}(fg) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$, $\text{Grad}(f \circ g) = (\text{Grad} f)(\text{Grad} g)$.

3.16 Satz "Koeffizientenvergleich"

Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$

$(a_n \neq 0)$ $(b_m \neq 0)$

Wenn $\forall x \in \mathbb{R}$: $p(x) = q(x)$,

dann $n = m$ (d. h. $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} q$)

und $a_k = b_k$ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

(Nicht wahr in endlichen Kö. K, $|K| = \ell$

$\#\{f : K \to K\} = \ell^\ell$)

Bew Sei $n \geq m$, $r := p - q$.

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R} : r(x) = 0$$

Zu zeigen: $c_k = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$r(0) = c_0 = 0. \implies$ Für $x \neq 0$ ist

$$c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} = \frac{r(x)}{x} = 0$$

Zeige: $c_1 = 0$. Setze Nullfolge (x_k) für x ein,

dann $x_k \xrightarrow{m} 0$,

$$0 = \cancel{0} = \lim_{k \to \infty} \Big(\underbrace{c_1 + c_2 x_k + \dots + c_n x_k^{n-1}}_{=0} \Big) = c_1$$

Daher $r(x) = c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$, wiederhole mit $\frac{r(x)}{x^2}$ etc. $\square$