Übungen Raumänderung

Gr. 1, Mi 12 - 14 Hr. Bauer, N15

Gr. 16, Mi 14 - 16 Hr. Iglspacher, 7E02

Gr. 7, Do 12 - 14 Fr. Wagner, D4A19

Polynome

3.16 Satz Koeff. vergleich

2 Poly, die als Abb. gleich sind, haben gleiche Koeff. en.

3.17 Bem Wenn $n = \text{grad}\, p \geq \text{grad}\, q$

und $p(x_j) = q(x_j)$ an $n+1$

verschiedenen $x_j \in \mathbb{R}$, dann

$\text{Grad}\, p = \text{grad}\, q, \quad \forall k \in \{0, .., n\} : a_k = b_k$

(Bsp: 1 Gerade durch 2 Punkte mit $x_1 \neq x_2$
1 Parabel durch 3 Punkte mit versch. x_j, etc.)

3.18 Satz "Polynomdivision"

Seien $p_1, p_2 \neq 0$ Poly, $\operatorname{grad}(p_2) \geq 1$.

$\exists_1 (q, r)$ Poly, $p_1 = p_2 q + r$

und $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(p_2)$

d.h. "$\dfrac{p_1}{p_2} = q$ Rest r"

Beweis Ex: schriftliche Division, z.B.

$$(6x^3 - 14x^2 + 11x - 3) : (3x^2 - x + 1) = 2x - 4 + \frac{5x+1}{3x^2 - x + 1}$$

$$6x^3 - \overset{2}{\cancel{4}}x^2 + 2x$$

$$\Delta = \quad -1\overset{2}{\cancel{0}}x^2 + 9x - 3$$

$$-12x^2 + 4x - 4$$

$$\Delta = 5x + 1$$

"$\underbrace{2x - 4}_{q}$ Rest $\underbrace{5x+1}_{r}$"

Eind.: zu zeigen: Wenn $\underline{p_1 = p_2 q + r}$

und $\underline{p_1 = p_2 \tilde{q} + \tilde{r}}$, dann $q = \tilde{q}$

und $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$ $\qquad r = \tilde{r}$.

$\operatorname{grad} \tilde{r} < \operatorname{grad} p_2$.

Denn: dann $0 = p_2(q - \tilde{q}) + r - \tilde{r}$

oder $\underline{p_2}(q - \tilde{q}) = \underline{\tilde{r} - r}$

Wäre $q \neq \tilde{q}$, dann $\operatorname{grad}(LS) = \operatorname{grad}(p_2) + \operatorname{grad}(q - \tilde{q})$

$\geq \operatorname{grad}(p_2)$

aber $\operatorname{grad}(RS) \leq \max(\operatorname{grad}(\tilde{r}), \operatorname{grad}(r))$

$< \operatorname{grad}(p_2)$ ↯

Also $q = \tilde{q}$, und $\tilde{r} = r$. $\square$

3.20 Def $\quad p_2 \mid p_1 \quad$ "p_2 teilt p_1"

$:\Longleftrightarrow$ $p_2 \neq 0$ und $p_1 = p_2 q$ für ein Poly q.

Bem (o. Bew.)

a) Wenn $p_2 \mid p_1$ und $p_3 \mid p_2$, dann $p_3 \mid p_1$.

b) Wenn $p \mid p_1$ und $p \mid p_2$, dann $p \mid \underline{(q_1 p_1 + q_2 p_2)}$ $\forall$ Poly q_1, q_2.

c) Wenn $p_2 \mid p_1$ und $p_1 \neq 0$, dann $\operatorname{Grad} p_2 \leq \operatorname{Grad} p_1$

d) Wenn $p_2 \mid p_1$ und $p_1 \mid p_2$, dann $p_1 = c p_2$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Def $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle von $p \iff p(\lambda) = 0.$

Bem $p(\lambda) = 0 \iff (x-\lambda) \mid p$

Bew: ÜA

Def λ heißt k-fache Nullstelle von $p \iff$

$$(x-\lambda)^k \mid p \quad \text{aber } (x-\lambda)^{k+1} \nmid p$$

$\Rightarrow (x-\lambda)^{k+2} \nmid p$, denn sonst

$\iff p(x) = (x-\lambda)^k q(x)$ mit $q(\lambda) \neq 0.$ $\quad (x-\lambda)^{k+1} \mid (x-\lambda)^{k+2} \mid p$

3.21 Folgerung Wenn $\operatorname{grad}(p) = n$, dann hat p höchstens n Nullstellen

$\Longrightarrow$ 3.17: 2 Poly vom Grad $\leq n$, die an $n+1$ Stellen übereinst. haben gl. Koeff.en.

~~3.23 Satz~~

3.22 Bem $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ kürzbar

$\Longleftrightarrow \exists$ gemeinsamer Teiler,

insbes. wenn $\exists$ gemeinsame Nullstelle

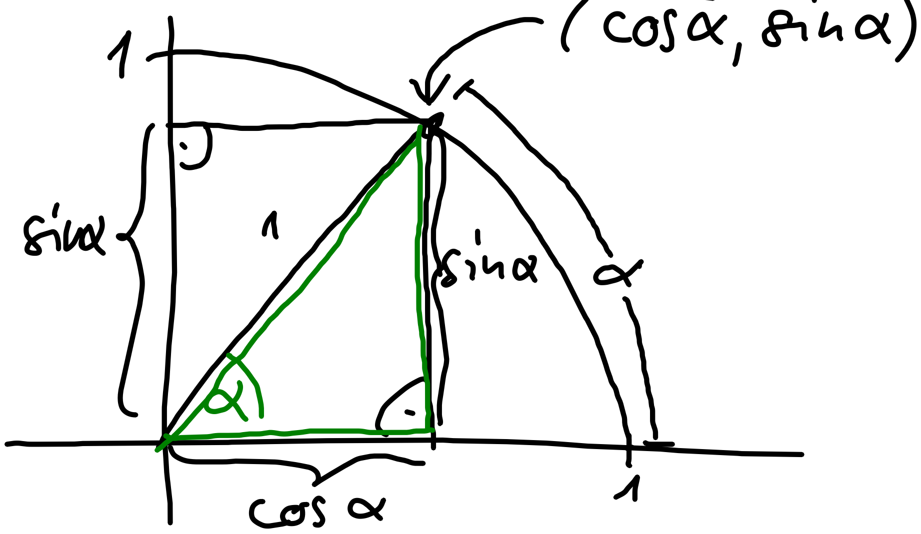
3.23 Satz Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ stetig, dann sind auch $f+g$, fg, cf $(c \in \mathbb{R})$ und $\dfrac{f}{g}$ auf $\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Sind $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ $(D_1 \subset \mathbb{R}, D_2 \subset \mathbb{R})$ stetig, dann auch $g \circ f$. Also sind Poly und rationale Fktnen stetig.

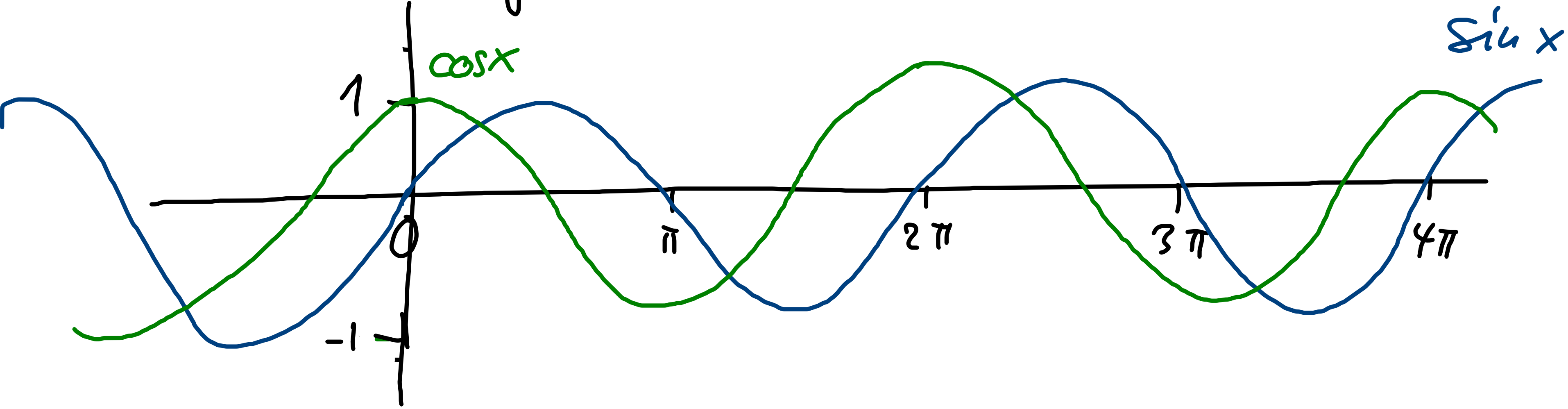
3.3 Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Winkel α = Länge des Kreisbogens

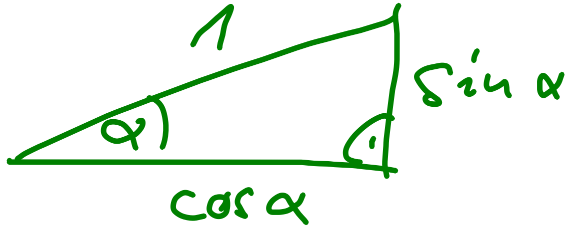




Eigenschaften: • $\cos 0 = 1$, • $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ Pythagoras



- periodisch:

  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

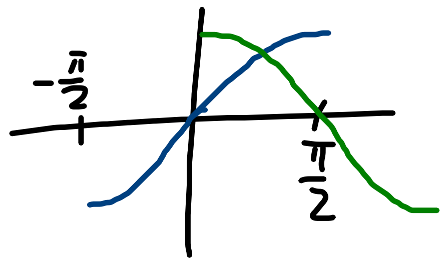
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

- Parität

  $\sin(-x) = -\sin x$ ungerade Fkt $f(-x) = -f(x)$

  $\cos(-x) = \cos x$ gerade Fkt $f(-x) = f(x)$

- stetig



- bij als Abb. $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

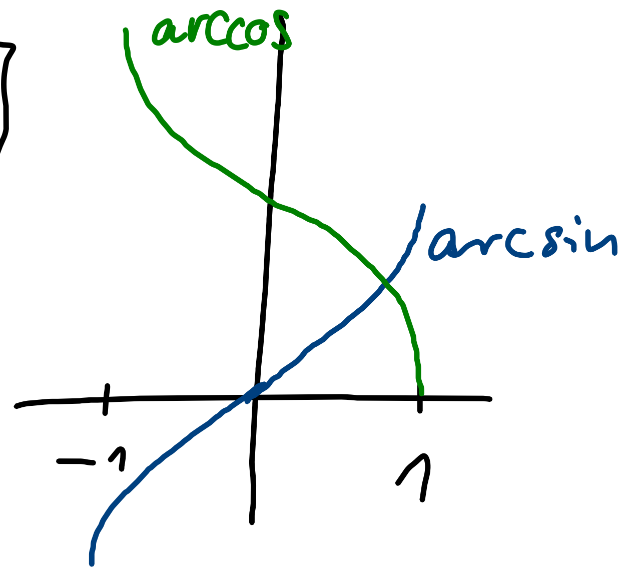
  $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$

$\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktionen

Arcus sinus, Arcus cosinus

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

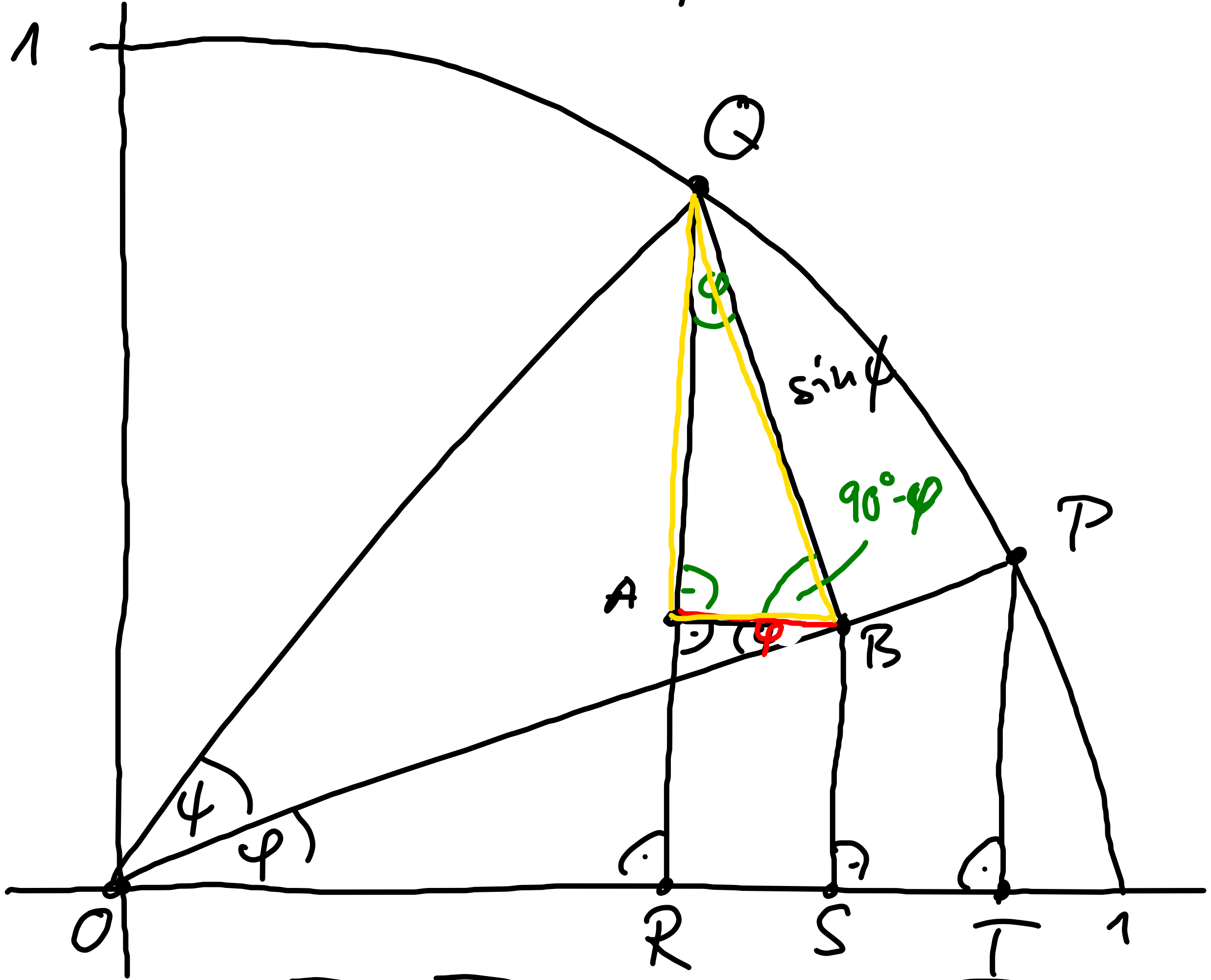


- verschoben: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- Additionstheoreme

Add. thme:

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$$



$$\frac{\overline{OT}}{\underbrace{\overline{OP}}_{1}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OB}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\underbrace{\overline{OP}}_{1}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{PT}}$$

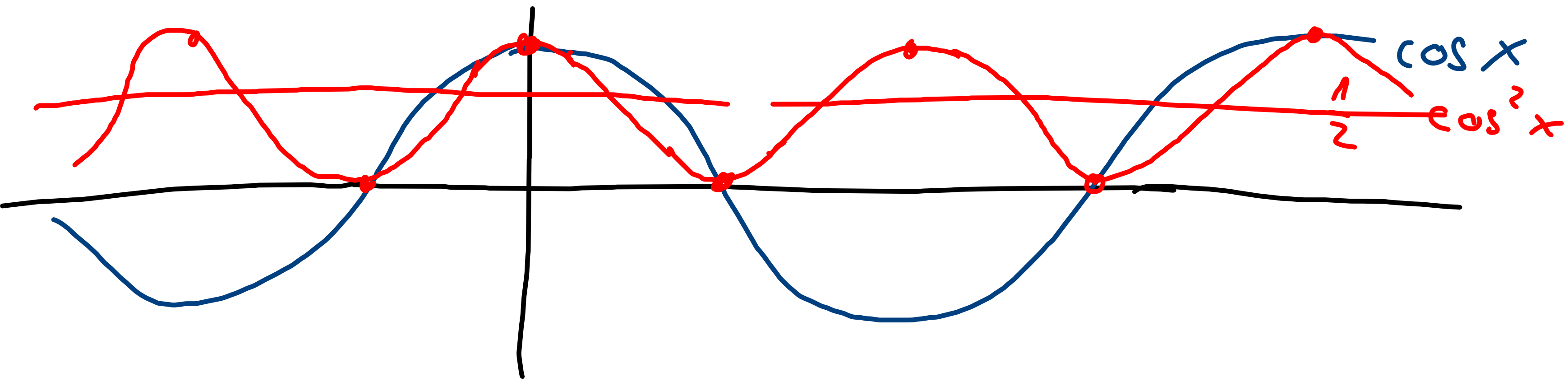
$$\cos(\varphi+\psi) = \overline{OR} = \overline{OS} - \overline{RS} = \underbrace{\overline{OB}}_{\cos\psi}\ \underbrace{\overline{OT}}_{\cos\varphi} - \overline{RS} = \cos\psi\cos\varphi - \underbrace{\overline{AB}}_{\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\varphi\ \frac{\sin\psi}{\overline{QB}}}$$

$$\sin(\varphi+\psi) = \overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = \cos\varphi\sin\psi + \underbrace{\overline{BS}}_{\cos\psi}\ \sin\varphi\ \cancel{\cos\varphi}\ .$$

Korollar: $(\varphi = \varphi)$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

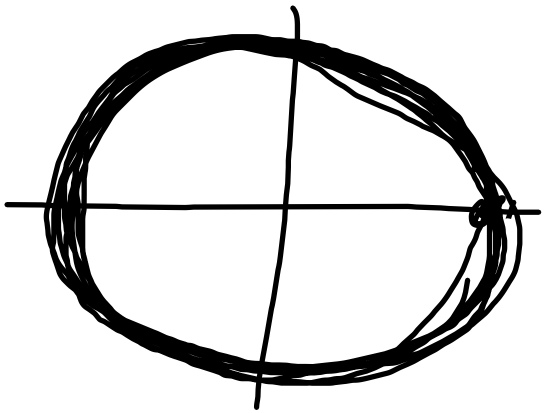
$$\Rightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$



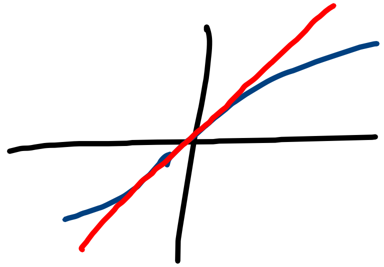
- Nullstellen: $\sin x = 0 \iff x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = 0 \iff x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$(\cos t, \sin t)$



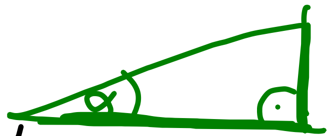
- $x_n \to 0 \Rightarrow \frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$



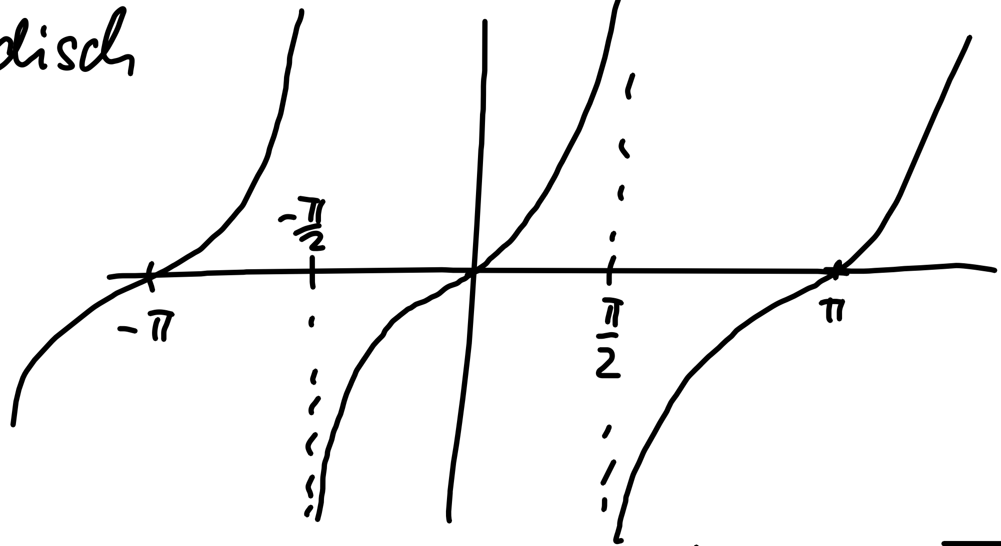
- Tangens

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (def. wo $\cos\alpha \neq 0$)

$= \text{Steigung}$



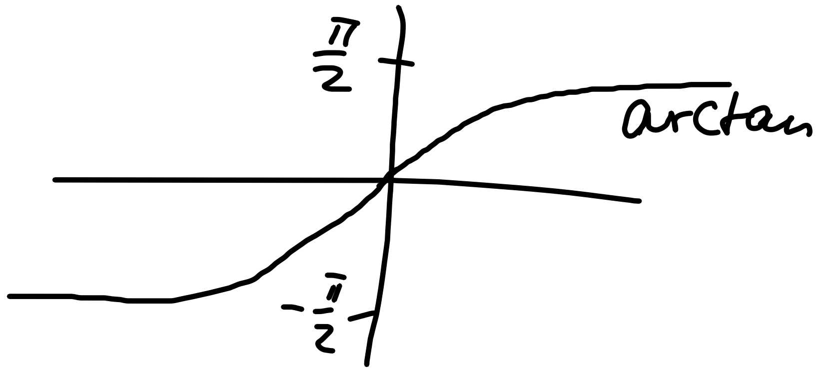
π-periodisch



$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

bij, Umkehrfkt

$\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Kotangens $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$