4 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$ ist ein Kö., als Menge $= \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$z = (x, y)$ für $x + iy$

<u>Def</u> Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(ist komm., ass., neutr. El. $(0,0)$, inverses El. zu (x,y) ist $(-x, -y)$.)

Wollen $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$$= x_1 x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2 + i y_1 x_2 + i x_1 y_2$$

$$= \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2} + i\underbrace{(y_1 x_2 + x_1 y_2)}$$

Def Mult. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$

$$:= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

Bem $i = (0, 1)$

reelle Zahlen $x = (x, 0)$

$$\Rightarrow x + iy = (x, 0) + \underbrace{(0, 1)(y, 0)}_{(0, y)}$$

$$= (x, y)$$

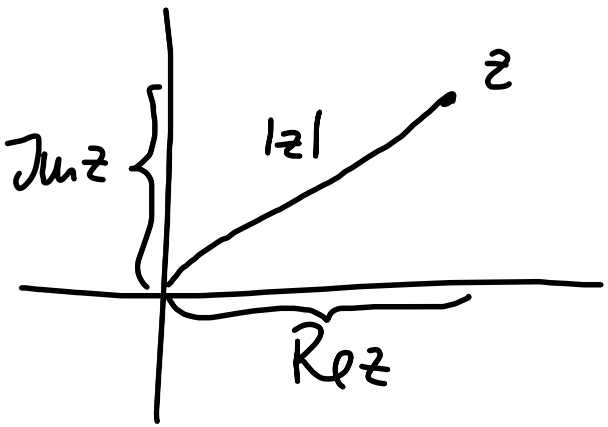
Mult. in $\mathbb{R}$: $(x_1, 0)\cdot(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Mult in $\mathbb{C}$ ist komm. (klar), ass. (später)
neutr. El. $(1,0)$, inv. El. zu $(x,y) \neq (0,0)$
ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, distr.

keine Anordnung.

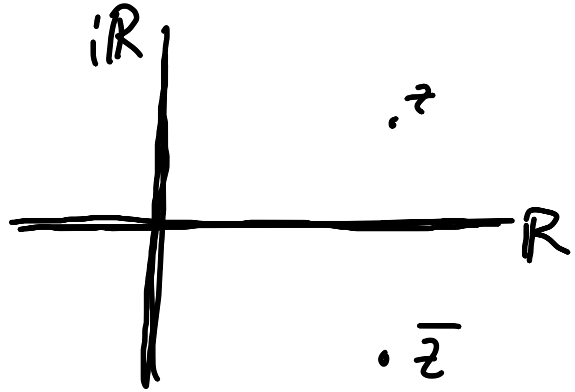
<u>Def</u> Für $z = x+iy$ heißt



- $\operatorname{Re} z = x$ Realteil
- $\operatorname{Im} z = y$ Imaginärteil
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ Betrag

$\bar{z} = x - iy$

komplex konjugierte Zahl



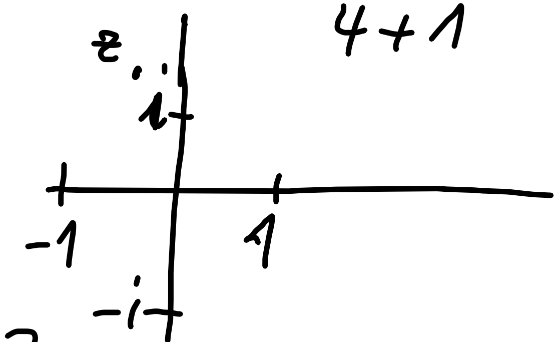
$z \in i\mathbb{R}$ heißt imaginäre Zahl

4.1 Bsp

$$z = \frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{2+6i+i-3}{2^2-i^2} = \frac{-1+7i}{4+1}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$



$$\operatorname{Re} z = \frac{-1}{5}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{7}{5} \in \mathbb{R}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}, \quad \bar{z} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

4.2 Bem $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$
- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\dfrac{1}{i} = -i$
- $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ für $z = x + iy$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|zw| = |z|\,|w|$

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$ Dreiecks-Ungl.

<u>Bew</u> $\underline{|z+w|^2} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$

$$= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}$$

$$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + |2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})| + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2$$

$$= \underline{(|z| + |w|)^2} \Rightarrow \text{Beh} \quad \square$$

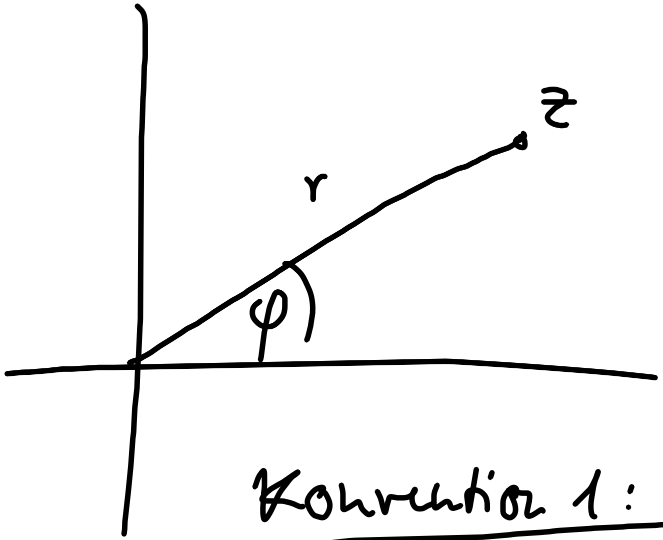
$$|z\overline{w}| = |z|\,|\overline{w}| = |z|\,|w|$$

Polarkoordinaten

$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$

$= \text{Argument von } z$

$= \text{Phase von } z$



Konvention 1: $0 \leq \varphi < 2\pi$

Konvention 2: $-\pi < \varphi \leq \pi$

$$x = r \cos \varphi = |z| \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi = |z| \sin \varphi$$

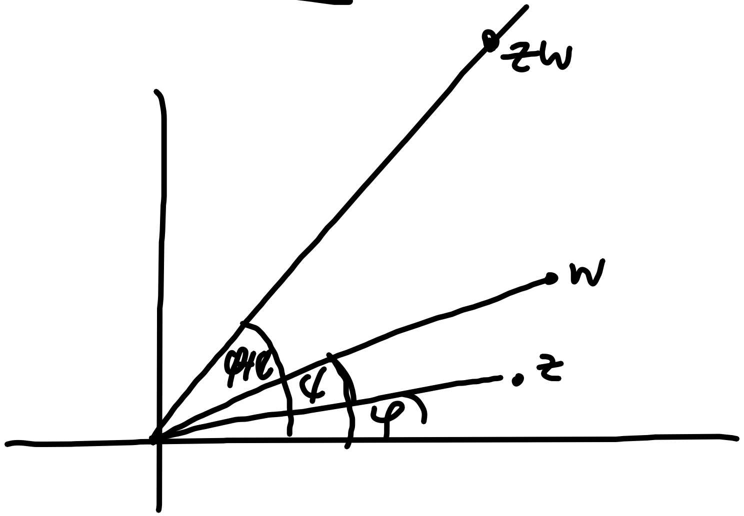
$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Multiplikation: Für $z, w \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg(z)$, $\psi = \arg(w)$

$$\Rightarrow zw = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)\,|w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$= |z||w| \big(\underbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}_{\cos(\varphi+\psi)} + \underbrace{i\sin\varphi\cos\psi + i\sin\psi\cos\varphi}_{i\sin(\varphi+\psi)}\big)$$

Also $zw = |z||w|\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$



Beträge mult.,
Arg.e addieren

Folgerungen

- Mult. ist ass.
- Die Abb. $w \mapsto zw$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist Drehstreckung (Drehung ~~um~~ um $\varphi = \arg(z)$, Streckung um $|z|$)
- Wenn $|z| = 1$, dann ist $w \mapsto zw$ eine Drehung.

4.2 exp und ln in $\mathbb{C}$

Def $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x+iy \mapsto \exp(z) := e^z$

$$\boxed{:= e^x(\cos y + i \sin y)}$$

Euler-Formel

$$\left(\text{später: } = \lim_{n\to\infty} \underline{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n} \right)$$

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt das mit bisheriger Def. überein:

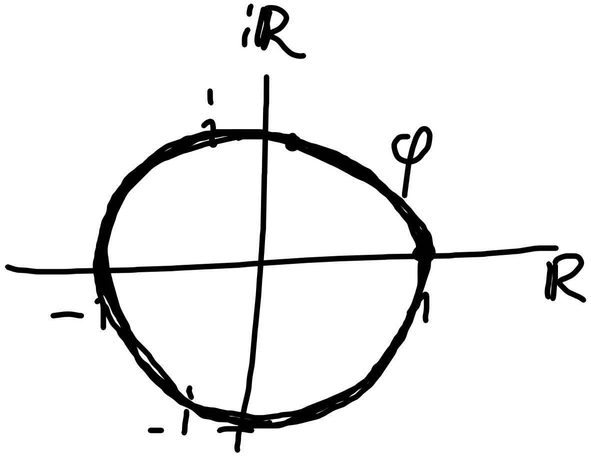
$$y=0, \quad e^{x+i0} = e^x(\underbrace{\cos 0}_{1} + i \underbrace{\sin 0}_{0}) = e^x$$

Funktionalgleichung $\quad e^z e^w = e^{z+w}$

Bew $\quad e^z e^w = e^{x+iy} e^{u+iv} = e^x(\cos y + i \sin y)\, e^u(\cos v + i \sin v)$

$$= \underbrace{e^x e^{\cancel{y}u}}_{e^{x+\cancel{y}u}} \big(\cos(y+v) + i \sin(y+v)\big) = e^{z+w}.$$

Für $z \in i\mathbb{R}$, $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$:



$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Euler-Formel

$\Rightarrow e^{i(\varphi+2\pi n)} = e^{i\varphi} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow |e^{i\varphi}| = 1$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}: \quad z = |z| e^{i\arg(z)}$ ("Polardarst.")

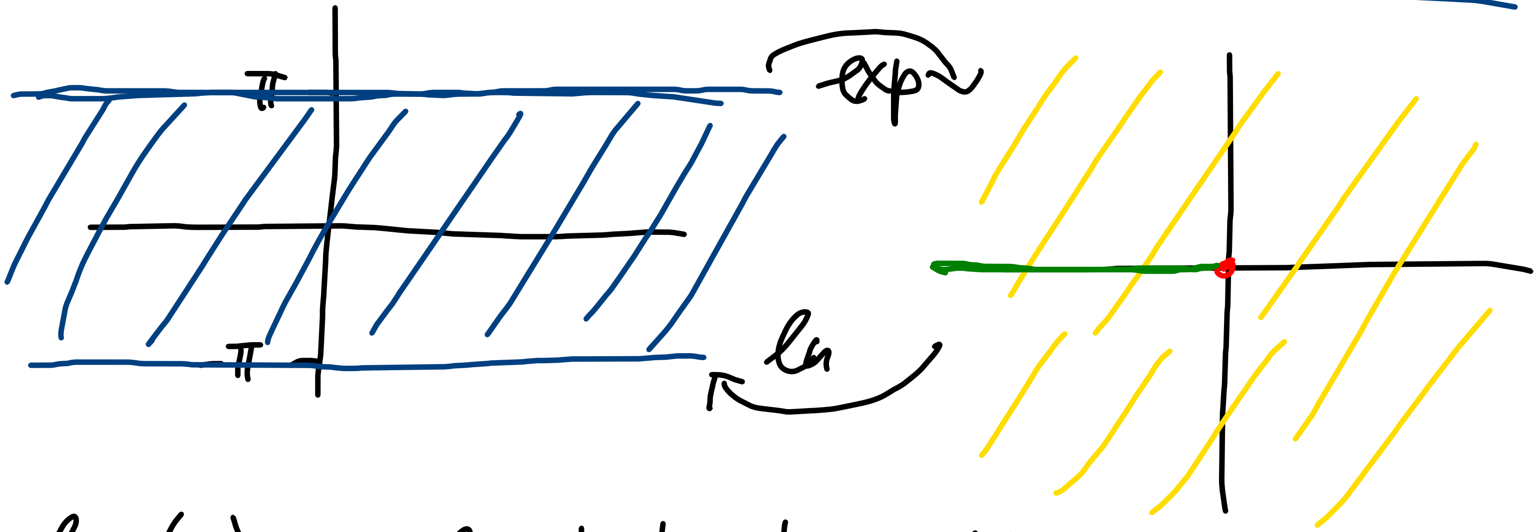
eind. für $z \neq 0$, daher ist

$\exp: \{x+iy \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < y \leq \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

bij; Umkehrfkt = komplexer Logarithmus

$\ln: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \{x+iy \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < y \leq \pi\}$

$$\ln : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \{x+iy \in \mathbb{C} \mid -\pi < y \leq \pi\}$$



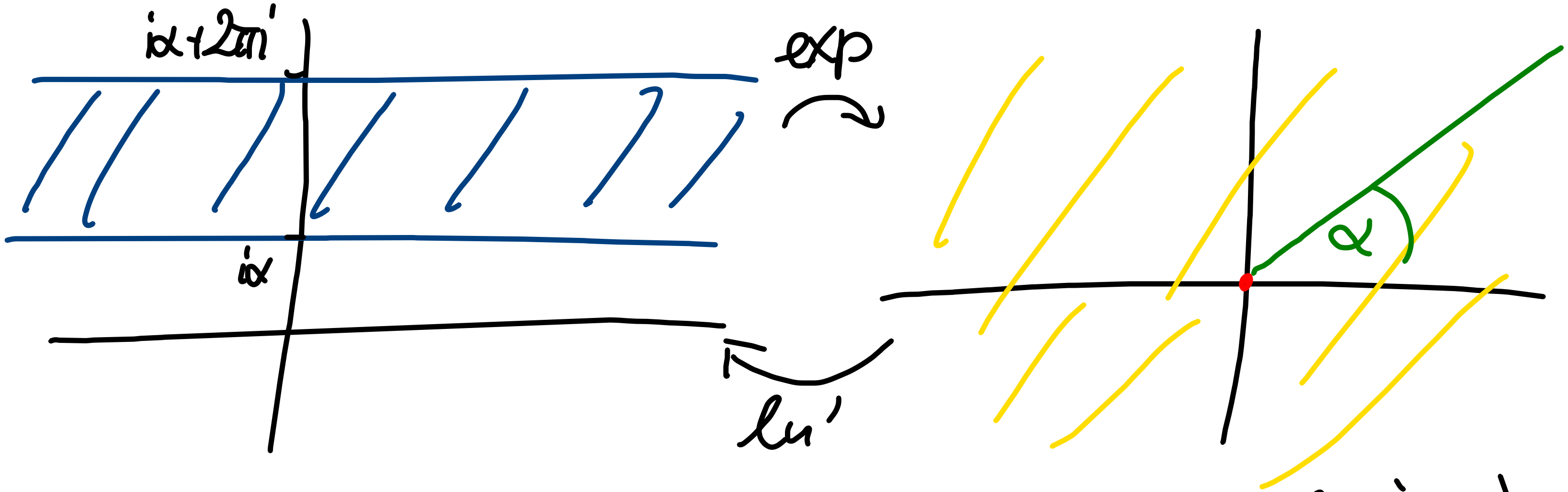
$$\ln(w) = \ln|w| + i\arg(w)$$

denn $e^{\ln|w| + i\arg(w)} = \underbrace{e^{\ln|w|}}_{|w|} e^{i\arg w}$.

ln ist unstetig: springt bei $(-\infty, 0)$;

ln ist stetig, wenn nur auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ definiert.

Andere mögl. Def. des ln:



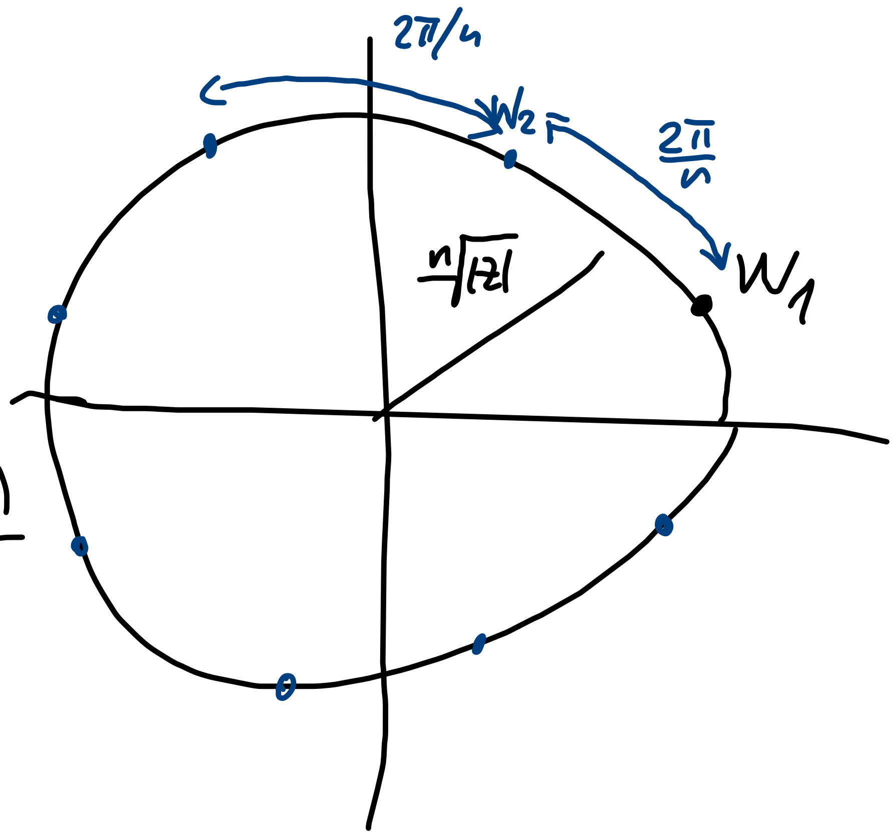
Variante des ln, unstetig (oder nicht definiert) auf Halbgeraden ~~mit~~ durch $e^{i\alpha}$.

$\alpha = -\pi$ "Hauptzweig" des ln.

4.3 Komplexe Wurzeln

45 Bem $w^n = z$. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau n n-te Wurzeln von z, nämlich (für $z = |z| e^{i\varphi}$)

$$
\left\{
\begin{array}{l}
w_1 = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\varphi/n} \\[2ex]
w_2 = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}} \\
\vdots \\
w_k = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\frac{\varphi+2\pi(k-1)}{n}} \\
\vdots \\
w_n = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}}
\end{array}
\right.
$$



$$|z| = |w^n| = |w|\,|w| \cdots |w| = |w|^n$$

$$z = w_k^n = w_1^n, \text{ denn } w_k^n = |z|\, e^{i\frac{(\varphi+2\pi(k-1))}{\cancel{n}}\cancel{n}} = \underline{|z|\, e^{i\varphi}}$$

$\nexists$ weitere Wurzeln: weil $p(w) = w^n - z$ höchstens n Nullstellen haben kann.