Komplexe Wurzeln

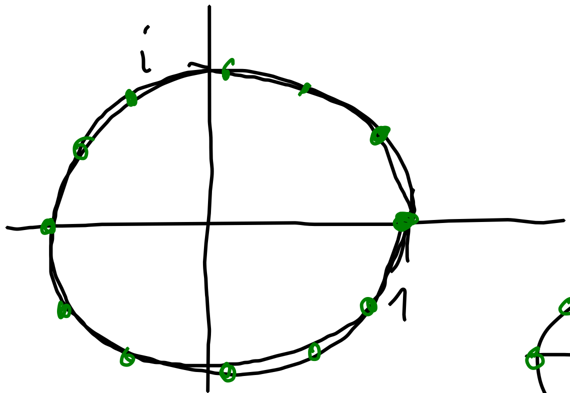
$$w^n = z$$

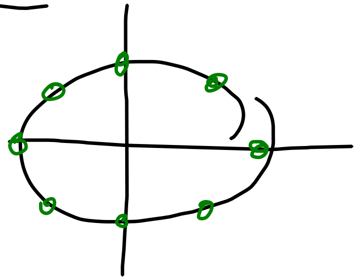
$\sqrt[n]{|z|}$ eind., "$\sqrt[n]{z}$" nicht eind.

Für $z \neq 0$ ex. n Lösungen von $w^n = z$.

Bsp $z = 1$. $w =$ "Einheitswurzel"

$$w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$





Insbes. $n=2$: $1, -1$

$n=4$: $1, i, -1, -i$

$n=8$: $1, e^{i\pi/2}, i, e^{i3\pi/2}, -1, e^{-i3\pi/2}, -i, e^{-i\pi/2}$

$$\{n\text{-te Wurzeln von } z\} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$$

$$= w_1 \, \{\text{Einheitswurzeln}\}$$

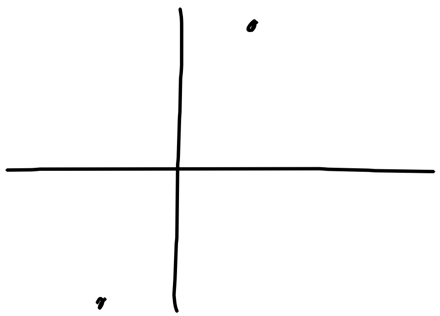
$$= w_1 \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

$$= w_{\text{partikuläre}} \cdot EW_{\text{allg.}}$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \, e^{i\varphi/n} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

für $z = |z| e^{i\varphi}$

<u>Bsp</u> "$\sqrt[2]{z}$"



Allg. Potenz

4.8 Def $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ \forall w \in \mathbb{C}$:

$$z^w := e^{w \ln z}$$

hängt von der Wahl des Zweiges des ln ab.

Hauptzweig $\Rightarrow$ unstetig bei $z \in (-\infty, 0]$

4.10 Fundamentalsatz der Algebra

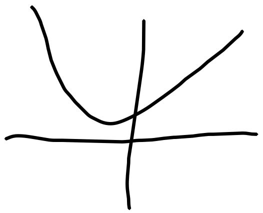
Jedes komplexe Poly $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \overset{\mathbb{C} \ni}{a_k} z^k$,

$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, vom Grad $n \geq 1$,

hat eine komplexe Nullstelle, d.h.

$\exists \lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0$.

Bsp $p(z) = z^2 + 1$,



, ~~$p(z)$~~ $p(i) = 0$

$p(-i) = 0$.

Also $p(z) = (z - \lambda)\, q(z)$, q = Poly vom Grad $n-1$

Also $p(z) = a_n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) \cdots (z - \lambda_n)$

Also $p(z) = a_n (z-\lambda_1)^{k_1} (z-\lambda_2)^{k_2} \cdots (z-\lambda_m)^{k_m}$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j \in \{1, \dots, m\}$

k_j = Vielfachheit der NST λ_j

$k_j \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_m = n$

<u>Bew</u> in komplexer Analysis

(= "Funktionentheorie")

Kap. 5: Unendliche Reihen

= unendl. Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Summandenfolge

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n \qquad m\text{-te Partialsumme}$$

5.1 Def Sei (x_n) Folge in $\mathbb{C}$.

"die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$" $:\iff s_m \xrightarrow{m\to\infty} a$

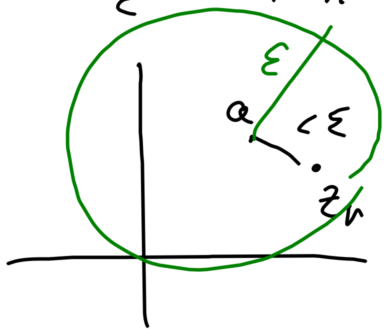
" divergiert" $:\iff (s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ divergiert

$\lim_{m\to\infty} s_m$ heißt "Wert der Reihe",

und man schreibt dafür auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Bem Konv. in $\mathbb{C}$ ist definiert wie in $\mathbb{R}$:

$$z_n \longrightarrow a :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; |z_n - a| < \varepsilon$$



Fakt: $z_n \longrightarrow a \iff$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a \text{ und} \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} a \end{cases}$$ (ÜA)

5.2 Bspe

a) $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

alle $x_n = 1$, $s_m = m$ div. bestimmt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$$

b) $0 + 0 + 0 + \dots$

alle $x_n = 0$, $s_m = 0 \longrightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$

c) $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

$x_n = (-1)^n$, $s_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$

also $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergent (kein Wert)

5.5 Satz Die <u>geometrische Reihe</u> $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{C}$

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, und

dann gegen $\dfrac{1}{1-q}$.

Beweis Tatsächlich gilt $\forall q \neq 1$:

$$S_{m+1} = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

Falls $|q| < 1$, dann $q^{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ weil $|q^{m+1}| = |q|^{m+1} \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow S_m \longrightarrow \frac{1}{1-q}.$$

Falls $q = 1$: $S_m = m \longrightarrow \infty$.

Falls $q \neq 1$, $|q| \geq 1$: Würde $S_m \longrightarrow S$, dann

$$q^{n+1} = s_{n+1} - s_n \xrightarrow{n \to \infty} s - s = 0$$

$$\Longrightarrow \ |q|^{n+1} = |q^{n+1}| \longrightarrow 0.$$

aber $|q|^{n+1} \not\longrightarrow 0$ für $|q| \geq 1$ ↯ $\square$

<u>Bem</u> Zenon von Elea (ca. 495 – 435 v. Chr.)

$$\frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \dots = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \quad \left(q = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{s}{2} \ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{s}{2} \cdot 2 = s.$$

5.6 Satz Die <u>harmonische Reihe</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

divergiert bestimmt nach ∞.

Beweis

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$\dots \frac{1}{2^{m-1}} + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow \infty$$

$(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wachsend weil Summanden ≥ 0, daher $S_k \to \infty$.

$\square$

5.7 Bem später: $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \approx \int_1^m \frac{1}{x}\,dx = \ln m$

daher div. die harmonische Reihe sehr langsam.

5.8 Satz Seien (x_n), (y_n) Folgen in $\mathbb{C}$

a) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, $a, b \in \mathbb{C}$

dann $\sum_{n=1}^{\infty} (a x_n + b y_n) = ax + by$.

b) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konv., dann $x_n \longrightarrow 0$.

(Bed. Nullfolge ist notw., aber nicht hinr.)

c) Änderung endlicher vieler x_n ändert nichts an der Konv. (aber den Wert).

Bew a) $s_m = \sum_{n=1}^{\overset{m}{\cancel{\infty}}} x_n$, $t_m = \sum_{n=1}^{m} y_n$,

$$u_m = \sum_{n=1}^{m} (ax_n + by_n) \Longrightarrow u_m = as_m + bt_m$$

$$\xrightarrow{m \to \infty} a\overset{x}{\cancel{s\,x_n}} + by.$$

b) $s_m \to s$, dann $x_n = s_{n+1} - s_n \longrightarrow s - s = 0$.

(Anderer Bew: (s_m) Cauchyfolge, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n, m \geq n_\varepsilon : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |\underbrace{s_{n+1} - s_n}_{x_{n+1}}| < \varepsilon \Longrightarrow x_{n+1} \longrightarrow 0.$$

c) Sei $x'_n = x_n \quad \forall n \geq N$

$$\Longrightarrow s'_m = s_m + c \quad \forall m \geq N \quad (c \text{ unabh. von } m)$$ □

5.11 Def Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **absolut konv.**

$\iff \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konv.