5.9 Satz Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$ mit $x_n \geq 0$.

Wenn $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben beschr.

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konv.

Bew (s_m) wachsend, Monotoniekriterium $\square$

5.10 Satz (Cauchy-Kriterium)

Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konv $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall m > n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon$$

Bew $\sum_{k=n+1}^{m} x_k = s_m - s_n$. Bed $\iff$ (s_m) Cauchyfolge. $\square$

5.11 Def Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt

abs. konv $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konv.

5.12 Satz Jede abs. konv. Reihe ist konv.

Bew ÜA.

5.13 Satz "Majorantenkriterium"

Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$, (y_n) aus $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konv.

und $|x_n| \leq y_n$ für n groß genug.

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. konv.

Bew ÜA.

Folgerung Wenn alle $x_n \geq 0$, dann

entweder $\sum x_n$ konv.

oder $\sum x_n = \infty$

Folgerung Wenn $\sum x_n$ abs. konv., dann gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

(Dreiecks-Ungl. für Reihen)

Bew

$$\left| \sum_{n=1}^{m} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n|, \quad m \to \infty$$

$$a_m \leq b_m \implies \lim a_m \leq \lim b_m$$

$\square$

5.14 Umordnungssatz

Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij.,

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. konv.; dann konv. auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{f(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \text{sogar abs.}$$

Bew. $y_n := x_{f(n)}$

$\forall m \in \mathbb{N} \; \exists N_m \in \mathbb{N} : \{f(1), \ldots, f(m)\} \subset \{1, \ldots, N_m\}$

(nämlich $N_m := \max\{f(1), \ldots, f(m)\}$)

$$\text{daher} \sum_{n=1}^{m} |y_n| \leq \sum_{n=1}^{N_m} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \in \mathbb{R}$$

also $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$, also $\sum y_n$ abs. konv.

<u>Zu zeigen:</u> gleiche Werte

Sei $s := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\varepsilon > 0$.

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

Wähle $m_\varepsilon := \max\{f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(n_\varepsilon)\}$,

dann $\{1, \ldots, n_\varepsilon\} \subset \{f(1), \ldots, f(m_\varepsilon)\}$

Dann $m \geq m_\varepsilon$

$$\left|\sum_{n=1}^{m} y_n - s\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{m} y_n - \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n - \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n - s\right|$$

$$\leq \cancel{\Big|} \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\max\{f(1)\ldots f(m)\}} |x_n| \cancel{\Big|} + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\max\{f(1)\ldots f(m_\varepsilon)\}} |x_n| + \left| -\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \right|$$

$$\leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n|$$

$$= 3 \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n| < \varepsilon . \qquad \square$$

5.15 Satz (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihe)

Ist (x_n) aus $\mathbb{R}$ fallende Nullfolge, dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \text{ konv. gegen } s$$

und $\forall m \in \mathbb{N}$: $|s - s_m| \leq x_{m+1}$.

Beweis Für $m \le l$ gilt

$$|s_l - s_m| = \left| \sum_{n=m+1}^{l} (-1)^n x_n \right| \le x_{m+1}$$

$$\left[\begin{array}{l} -x_{m+1} \\ +x_{m+2} \\ -x_{m+3} \\ +x_{m+4} \end{array}\right]$$

also ist (s_m) Cauchyfolge und für $l \to \infty$ folgt $|s - s_m| \le x_{m+1}$. $\square$

5.16 Bsp alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(+\frac{1}{n}\right)$$

konv., aber nicht abs.

Tatsächlich

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots = \infty$$ ~~weil~~

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots = \infty$$

weil

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\le 1}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}}+\underbrace{\dots}_{\le\frac{1}{5}}=\infty$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Maj.}}}{=}\infty$$

$$\cancel{1}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{\le\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}_{\le\frac{1}{4}}+\dots=\infty$$

5.17 Riemannscher Umordnungssatz

Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$. Falls $\sum x_n$ konv, aber nicht abs.
Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij mit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = c$.

Bew Sei (p_k) die Teilfolge der positiven Summanden
(q_k) die der negativen

1) Es gilt $\sum p_k = \infty$, $\sum q_k \underset{\text{Satz } 5.14}{=} -\infty$

Denn: wären beide konv $\Longrightarrow$ $\sum |x_n|$ konv.

wäre genau eine konv., etwa $\sum q_k = q \in \mathbb{R}$

~~dann~~ und $\sum p_k = \infty$, dann

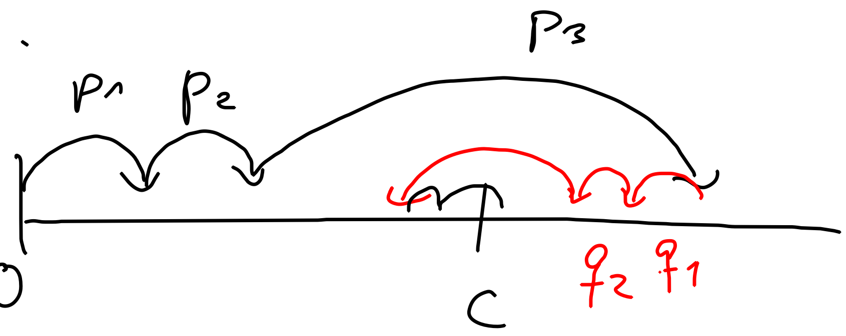
$$\sum_{n=1}^{m} x_n = \sum_{k=1}^{l} p_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{r} q_k}_{\in [q,0]} \xrightarrow{l \to \infty} \infty \;\lightning$$

2) $p_k \to 0$, $q_k \to 0$, weil $x_n \to 0$.

3) Wähle f so:

$$
\begin{aligned}
x_{f(1)} + x_{f(2)} + \dots \;=\; & p_1 + \dots + p_{k_1} \\
& + q_1 + \dots + q_{l_1} \\
& + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} \\
& + q_{l_1+1} + \dots + q_{l_2} \\
& + \dots
\end{aligned}
$$

so addiere p's bis c erstmals überschritten, dann q's bis c erstmals unterschritten, etc.



$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{m} x_{f(n)} - c\right| \le \max\{\underset{\text{letzte}}{p_{k_j}}, |\underset{\text{letzte}}{q_{l_j}}|\} \longrightarrow 0. \quad \square$$