Tests auf Konv.

"Majorantenkrit."

$\Longrightarrow$ Vergleich mit $\sum q^n$:

"Wurzelkrit.", "Quotientenkrit."

Idee: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konv.?

wenn $\underline{\sqrt[n]{|x_n|} \leq q < 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

dann $|x_n| \leq q^n$ $\xRightarrow{\text{Maj.}}$ $\sum |x_n|$ konv.

$\Longrightarrow \sum x_n$ konv.

Dafür reicht es, dass $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$ für fast alle

5.18 Def Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$ beschr.

Limes superior $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

$$:= \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist HP von } (x_n)\}$$

entspr. Limes inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \inf\{\text{HPe}\}$.

Bem • $\{\text{HPe}\} \neq \emptyset$ nach Bolzano-Weierstraß und beschr. $\Longrightarrow \exists \sup \in \mathbb{R}$

• $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ist selbst HP von (x_n):

$$\exists\, y_k \in \{\text{HPe von } (x_n)\} : \; y_k \xrightarrow{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} x_n$$

also $\left| y_k - \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq k_\varepsilon$

und $\exists\, \infty$ viele $x_{n_\ell} \in \left(y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$

$$\Longrightarrow \quad \left| x_{n_\ell} - \limsup_{n\to\infty} x_n \right| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ lim sup ist HP. $\square$

- lim sup ist also der <u>größte HP</u>.
- Wenn $\exists \lim x_n$, dann $\limsup x_n = \lim x_n$
  $= \liminf x_n$.

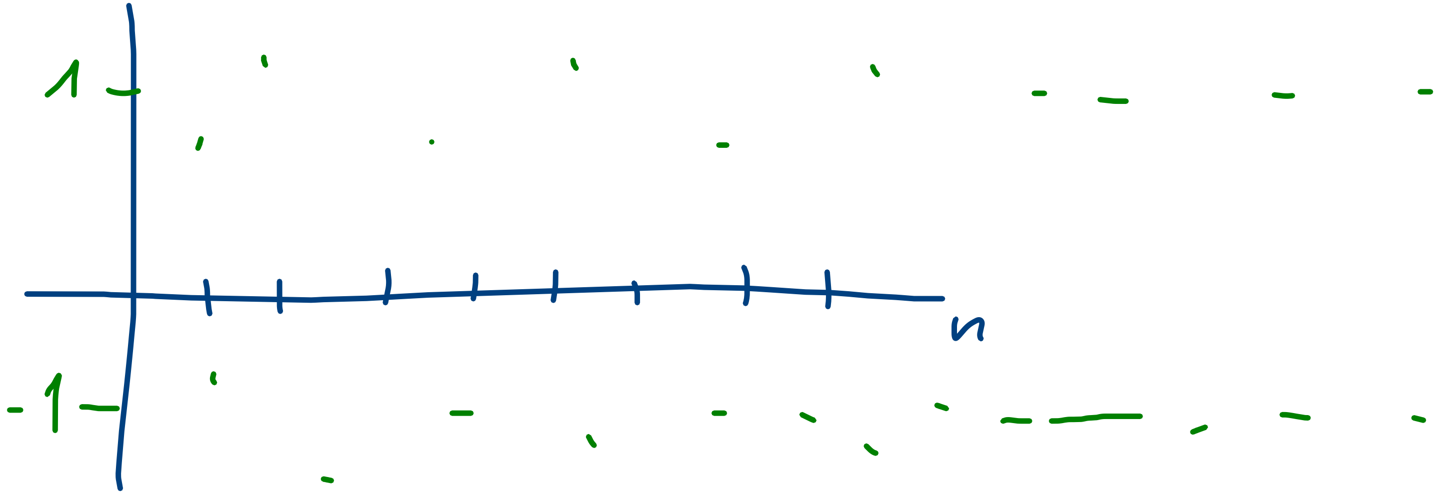
<u>Def</u> Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$ unbeschr.

Falls (x_n) nicht nach ob. beschr.: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \infty$

Falls (x_n) nach ob. aber nicht nach unten beschr.

entweder $\nexists$ HP $\Longrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} x_n := -\infty$.

oder $\exists$ HP $\Longrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \sup\{HPe\}$



$\{HP_e\} = \{-1, 1\}$

5.19 Prop Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n \mid n \geq k\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n \mid n \geq k\}$$

Bew ÜA.

Bem Wenn $\limsup_{n \to \infty} x_n = q \in \mathbb{R}$,

und $\varepsilon > 0$, dann

$x_n < q + \varepsilon$ für fast alle n

Denn: (x_n) nach ob. beschr.

in $[q+\varepsilon, \sup(x_n)]$ liegen entweder

endl. viele x_n oder (Bolzano-W) ein HP $\lightning$

5.20 Satz "Wurzelkriterium"

Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$. $\sum x_n$ ist abs. konv., wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

$\sum x_n$ ist div., wenn $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ für ∞-viele n.

Bem Manchmal ist keine der 2 Bed. erfüllt:

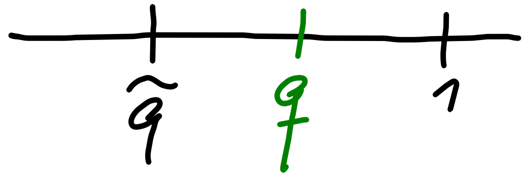
wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \overset{=}{\cancel{\geq}} 1$

aber nur endl. viele $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$.

Bew Falls $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = \tilde{q} < 1$, dann

für fast alle n: $\sqrt[n]{|x_n|} \le q$.

$q := \frac{\tilde{q} + 1}{2} < 1$, also $|x_n| \le q^n$



$\overset{\text{Maj.}}{\Longrightarrow} \sum x_n$ abs. konv.

- Falls ∞-oft $\sqrt[n]{|x_n|} \ge 1$, dann jeweils $|x_n| \ge 1$

also ist x_n keine Nullfolge $\Longrightarrow \sum x_n$ div. $\square$

5.21 Satz "Quotientenkriterium"

Sei (x_n) aus $\mathbb{C}$ und fast alle $x_n \neq 0$.

$\sum x_n$ ist abs. konv., wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1.$$

$\sum x_n$ ist div., wenn $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ für fast alle n ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~.

Bem Manchmal ist keine der 2 Bed. erfüllt:

wenn ∞-oft $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$

und ∞-oft $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$.

<u>Bew</u> • Falls $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \tilde{q} < 1$,

setze $q := \frac{\tilde{q}+1}{2}$. Dann

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\iff |x_{n+1}| \leq q\,|x_n|$$

also $|x_n| \leq |x_{n_0}|\, q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

$\implies \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ wird durch $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_{n_0}|\, q^{n-n_0}$

majorisiert $\implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. konv.

und $x_n \neq 0$

- Falls $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \; \forall n \geq n_0$

dann $|x_n| \geq |x_{n_0}| > 0$

also ist x_n keine Nullfolge $\Rightarrow \sum x_n$ div. $\square$

5.22 Bsp $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ Exponentialreihe

ist abs. konv. $\forall z \in \mathbb{C}$.

Bew $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2} < 1$.

$x_n = \frac{1}{n!} z^n$ $\forall n \geq 2|z|$

Frage: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Klar: nicht für $\alpha \leq 1$.

<u>5.26 Satz</u> (Cauchy's Verdichtungsmethode)

Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$ fallend, nicht-negativ, $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \; \forall n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konv.} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} \text{ konv.}$$

<u>Bew</u> Gruppiere je 2^k Terme

Untere Schranke: 2^k mal der kleinste,

$$\sum_{n=1}^{2^m} x_n = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + \dots + x_8) + \dots + (x_{2^{m-1}+1} + \dots + x_{2^m})$$

$$\geq \frac{1}{2} x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \dots + 2^{m-1} x_{2^m}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_0^m 2^k x_{2^k}$$

Ob. Schr: so ähnlich

$$\sum_{n=1}^{2^m-1} x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + \ldots + x_7) + \ldots + (x_{2^{m-1}} + \ldots + x_{2^m-1})$$

$$\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^{m-1} x_{2^{m-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} 2^k x_{2^k}$$

Daher Part. s. (x_n) beschr $\Longleftrightarrow$ Part. s. $(2^k x_{2^k})$ beschr.

$\Longrightarrow$ Satz. $\square$

5.27 Folgerung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

Bew $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ mit } q = 2^{1-\alpha}$$

$$q < 1 \Longleftrightarrow 2^{1-\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 2^{-\alpha} < \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 2^\alpha > 2 \Longleftrightarrow \alpha > 1. \qquad \square$$

Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv.

$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konv. $\forall \varepsilon > 0$ $\qquad \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \;? \right)$

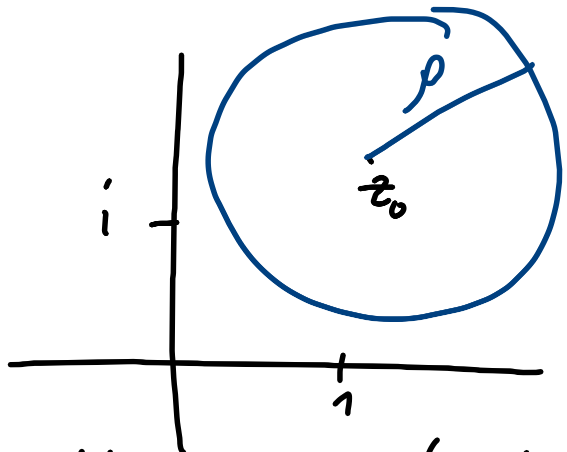
$\sum \frac{1}{n}$ div.

5.23 Def

Sei (a_n) aus $\mathbb{C}$, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Koeff. a_n und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.



Konvergenzkreis

5.24 Satz und Def

Sei
$$\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{falls } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty \\ 0 & \text{falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty & \text{falls } 0 = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \end{cases}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

- konv. abs. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$
- div. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \rho$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = \rho$ kann man ~~dort wi~~ nicht ohne weitere Informationen über die Konv. entscheiden.

ρ heißt <u>Konvergenzradius</u>