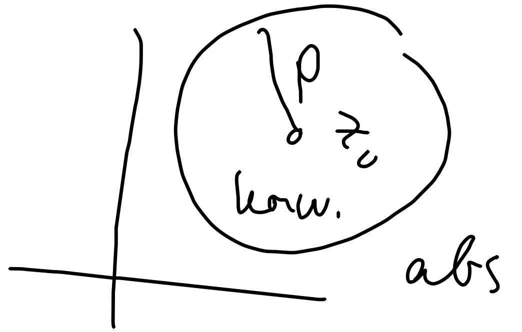
5.24 Satz

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

- konv. abs. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$
- div. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > \rho$.



mit $\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{bzw.} \\ 0 & \text{falls } \limsup = \infty \\ \infty & \text{falls } \limsup = 0. \end{cases}$

<u>Bew</u> Verwende Wurzelkrit.

1) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} = |z-z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1 \Rightarrow \sum \text{ konv.}$$

2) Wenn aber $|z-z_0| > \rho$, dann

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} = \frac{|z-z_0|}{\rho} > 1$$

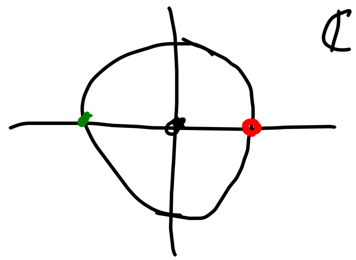
$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} > 1 \text{ für } \infty\text{-viele } n. \Rightarrow \sum \text{ div.}$$

3) Bei $|z - z_0| = \rho$:

<u>Bsp</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \quad (z_0 = 0,\ a_0 = 0,\ a_n = \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1)$

$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \implies \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

$\implies \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1. \implies \rho = 1.$



Für $z = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

Für $z = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alt. harm. Reihe, konv. $\square$

<u>5.25 Bsp</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ konv. abs. $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = \rho$.

Denn: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $\rho = 1$

Für $|z| = 1$ wird

$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n}$ majorisiert durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (konv.)

$\Longrightarrow$ abs. konv.

Doppelreihen

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl}$$

	$l=1$	2	3	$\cdots$
$k=1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$
3	x_{31}	x_{32}		
$\vdots$	$\vdots$			

Def = ?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right)$ falls

$y_k := \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konv.

("zeilenweise Summation")

b) $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right)$, falls

$z_l := \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl}$ und $\sum_{l=1}^{\infty} z_l$ konv.

("spaltenweise Summation")

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bij

$\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$

bei abs. Konv. stimmen sie überein:

5.28 Umordnungssatz für Doppelreihen

Doppelfolge $(x_{k\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$. Äq. sind:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konv. für eine Anordnung f

b) — " — jede — " —

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |x_{k\ell}|\right)$ konv.

d) $\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k\ell}|\right)$ konv.

Und in dem Fall ist $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} x_{k\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k\ell}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} \quad (*)}$

für jede Anordnung f.

Bsp 5.30

x_{kl}	$l=1$	2	3			
$k=1$	1	-1	0	0		
2	0	1	-1	0		
3	0	0	1	-1		
				1	-1	
					1	-1
						$\ddots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}\right) = 0$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl}\right) = 1$$

nicht abs. konv.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}|\right) = \infty$$

Beweis des Umordnungssatzes

(a) $\Leftrightarrow$ (b) nach Satz 5.14

(a) $\Rightarrow$ (d) Sei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}| =: \tilde{x}$

$\forall K, L \in \mathbb{N} \ \exists N(K,L) \in \mathbb{N}$:

$$\{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, L\} \subset \{f(1), \dots, f(N(K,L))\}$$

$$\Rightarrow \text{erstens} \sum_{k=1}^{K} |x_{k\ell}| \leq \sum_{n=1}^{N(K,\cancel{L}\ell)} |x_{f(n)}| \leq \tilde{x} \quad \text{also} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k\ell}| \text{ konv.}$$

$$\text{zweitens} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k\ell}| = \sum_{\ell=1}^{L} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_{k\ell}|$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} |x_{k\ell}|$$

$$\le \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{N(K,L)} |x_{\cancel{kl}\; f(n)}| = \tilde{X}$$

$N(K,L) \ge KL$

$$\Longrightarrow \text{es konv. } \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) ganz ähnlich

Ebenso (a) $\Longleftrightarrow$ (c).

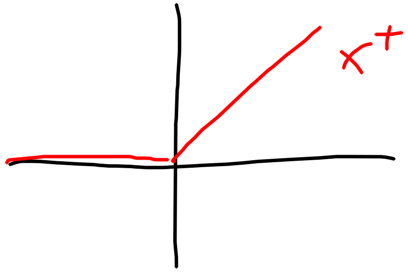
Daher (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d).

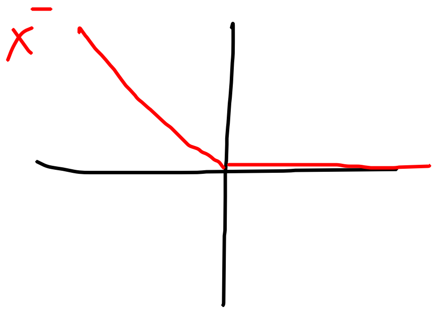
und $\sum_k \sum |x_{kl}| = \sum_l \sum_k |x_{kl}| = \sum_n |x_{f(n)}|$

Also $(*)$ für $x_{kl} \ge 0$.

Setze $x^+ = \max\{0, x\}$

$x^- = \max\{0, -x\}$





d.h. $x = x^+ - x^-$

Dann $\displaystyle\sum_n x^\pm_{f(n)} = \sum_n |x^\pm_{f(n)}| \leq \sum_n |x_{f(n)}| < \infty$

(*) für $x_{kl} \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_n x^\pm_{f(n)} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^\pm_{kl}$

$$\Rightarrow \sum_k \Big(\sum_l x_{kl} \Big) = \sum_k \Big(\sum_l x^+_{kl} - \sum_l x^-_{kl} \Big)$$

$$= \sum_k \sum_l x^+_{kl} - \sum_k \sum_l x^-_{kl} = \overbrace{\sum_n x^+_{f(n)} - \sum_n x^-_{f(n)}}^{= \sum_n x_{f(n)}}$$

also $(*)$ für $x_{kl} \in \mathbb{R}$

Für $x_{kl} \in \mathbb{C}$ zerlege in Re und Im. $\square$

Bsp $\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} y_l\right) \overset{\text{Vermutl.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_k y_l$

5.31 Korollar (Cauchy-Produkt)

Sind $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ und $y = \sum_{l=1}^{\infty} y_l$ abs. konv., dann $xy = \sum_{m=1}^{\infty} z_m$

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} x_k y_{m-k+1}.$$

$x_k y_l$	$l=1$	2	3
$k=1$	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3 ...
2	x_2y_1	x_2y_2	
3	x_3y_1		
$\vdots$	$\vdots$		

<u>Beweis</u> Für $w_{kl} := x_k y_l$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|w_{kl}| = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\lim_{L\to\infty}\sum_{l=1}^{L}|x_k||y_l|$$

$$= \lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}|x_k|\underbrace{\lim_{L\to\infty}\sum_{l=1}^{L}|y_l|}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}|x_k|\right)}_{=:\tilde{x}}\underbrace{\left(\lim_{L\to\infty}\sum_{l=1}^{L}|y_l|\right)}_{=:\tilde{y}} = \tilde{x}\tilde{y} < \infty$$

Satz 5.28 $\Rightarrow$ es konv. $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}w_{kl} = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\lim_{L\to\infty}\sum_{l=1}^{L}x_k y_l = \left(\lim_{K}\sum x_k\right)\left(\lim_{L}\sum y_l\right)$

und $\sum z_n$ ist eine Umordnung und hat deshalb denselben Wert $\tilde{x}\tilde{y}$. □

5.32 Bsp Exponentialreihe

Wissen: $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist abs. konv. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$E(z)\,E(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,\frac{w^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} m!\,\frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{m-k}}{(m-k)!}}_{(z+w)^m \text{ binom. Lehrsatz}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z+w)^m = E(z+w).$$

(Später: $E(z) = \exp(z)$)