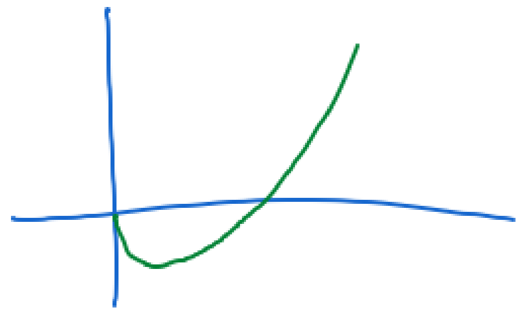
Kap 6: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Bsp $f: D \to \mathbb{R}$, $D = (0,\infty)$, $f(x) = x \ln x$



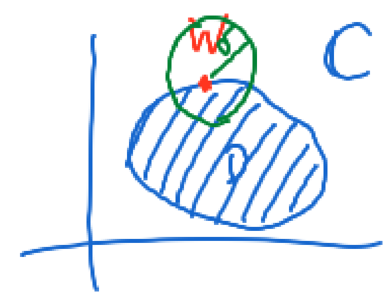
"$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$"

(Def heute, Bew später)

Def Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{K}$.

$w \in \mathbb{K}$ heißt <u>Randpunkt von D</u>. $:\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall \delta > 0 \ \exists z \in D : |z - w| < \delta \quad \text{und} \\ \forall \delta > 0 \ \exists z \notin D : |z - w| < \delta \end{cases}$$

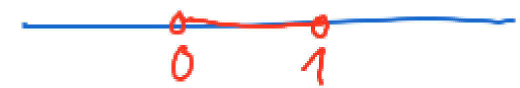


Rand von D $= \partial D = \{\text{Randpunkt}\}$

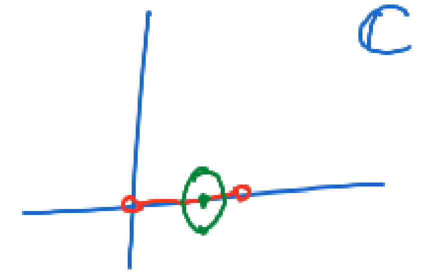
Abschluss von D $= \overline{D} = D \cup \partial D$.

Bspe · $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D = (0,1)$, $\partial D = \{0,1\}$

$\overline{D} = [0,1]$

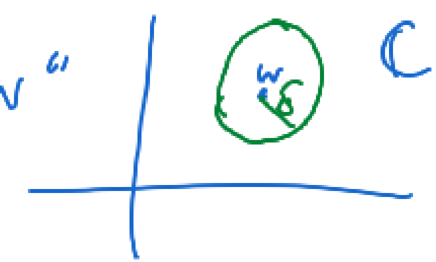


· $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $D = (0,1)$, $\partial D = [0,1] = \overline{D}$

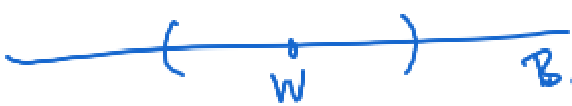


Def $B_\delta(w) := \{ z \in \mathbb{K} \mid |z - w| < \delta \}$

"der offene Ball vom Radius δ um w"



$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$



$B_\delta(w) = (w - \delta, w + \delta)$

Def $D^c = \mathbb{K} \setminus D$ Komplement

Bem $\partial D = \{ w \in \mathbb{K} \mid \forall \delta > 0 : B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \neq B_\delta(w) \cap D^c \}$

$$\overline{D} = \{ w \in \mathbb{K} \mid \forall \delta > 0 : B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \}$$

Bew "$\subset$": Wenn $w \in D$, dann $B_\delta(w) \cap D \supset \{w\}$.

Wenn $w \in \partial D$, dann $B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset$.

"$\supset$": Wenn $B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset$ und $w \notin D$,

dann $B_\delta(w) \cap D^c \supset \{w\}$, also $w \in \partial D$. $\square$

Bem $w \in \overline{D} \iff \exists$ Folge (z_n) aus D: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$

Bew ÜA.

6.3 Def Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D}$, $w \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w \quad \text{oder} \quad f(z) \xrightarrow{z \to z_0} w$$

$$:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D: \text{wenn } |z - z_0| < \delta, \text{ dann } |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Außerdem für $f: D \to \mathbb{R}$: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \pm\infty$ $:\iff$

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D: \text{wenn } |z - z_0| < \delta, \text{ dann } \pm f(z) > M.$$

Außerdem für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = w \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists R \in \mathbb{R}:$$

wenn $\pm x > R$, dann $|f(x) - w| < \varepsilon$

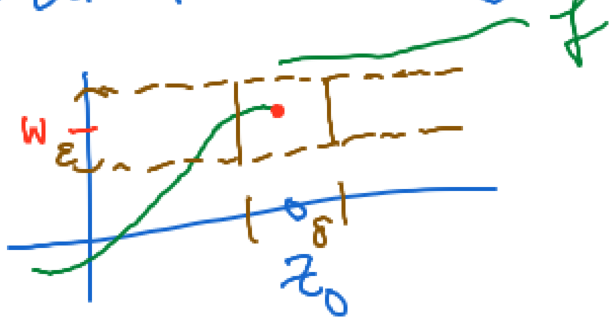
Außerdem für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

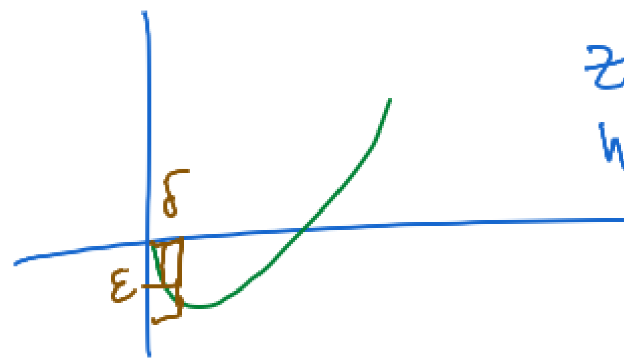
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists R \in \mathbb{R}:$$

wenn $x > R$, dann $\pm f(x) > M$.

entspr. für $x \to -\infty$

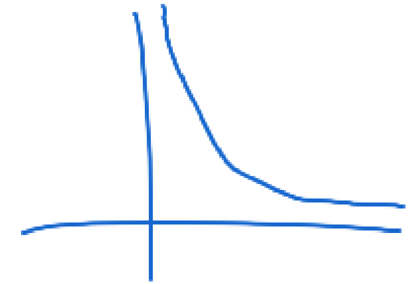
$D = \mathbb{R} \setminus \{z_0\}$





$z_0 = 0$
$w = 0$

6.4 Bsp $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$



- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

denn für $M > 0$ und $\delta = \frac{1}{M}$: wenn $x < \delta$,

dann $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M$.

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

denn für $\varepsilon > 0$ und $R = \frac{1}{\varepsilon}$:

wenn $x > R$, dann $|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon$.

6.5 Prop Für $f: D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \overline{D}$ sind äq:

a) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

b) $\forall (z_n)$ aus D: wenn $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$, dann $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$

In diesem Fall gilt:

(*) für jede (z_n) aus D mit $z_n \to z_0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Bew a) $\Rightarrow$ b): Sei $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$, $\varepsilon > 0$, (z_n) aus D, $z_n \to z_0$

sei δ passend. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, $|z_n - z_0| < \delta$ $\forall n \geq N$.

Dann $|f(z_n) - w| < \varepsilon \ \forall n \geq N$, also $f(z_n) \to w$.

b) $\Rightarrow$ a) und (*): Erstens, alle $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ stimmen

übereinstimmen $(=: w)$.

Denn wenn $x_n \to z_0$ und $y_n \to z_0$, dann

auch $(z_n) := (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots) \to z_0$

"Reißverschlussprinzip"

b) $\Rightarrow \exists \lim f(z_n)$ und $= \lim f(x_n)$ weil Teilfolge

und $= \lim f(y_n)$, also $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.

Zweitens, wäre a) oder (*) falsch, dann

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists z \in D: |z - z_0| < \delta$ aber $|f(z) - w| \geq \varepsilon$

Wähle so ein $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists z_n \in D: |z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ (also $z_n \to z_0$)

aber $|f(z_n) - w| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also

$$f(z_n) \not\longrightarrow w \quad ⚡ \qquad \square$$

<u>6.6 Korollar</u> Für $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ sind äq:

a) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

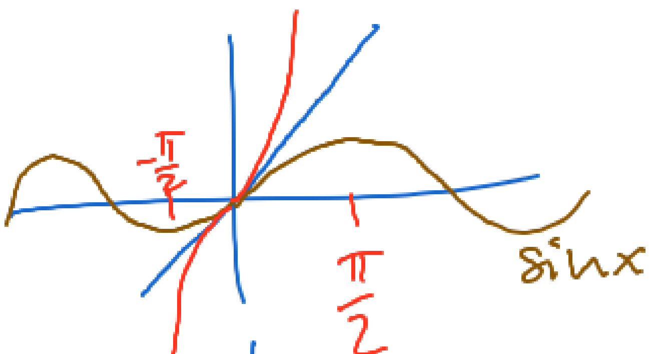
b) f ist stetig in z_0

Also („ε-δ-Def. der Stetigkeit"): f ist st. in $z_0 \Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D$: wenn $|z - z_0| < \delta$, dann $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

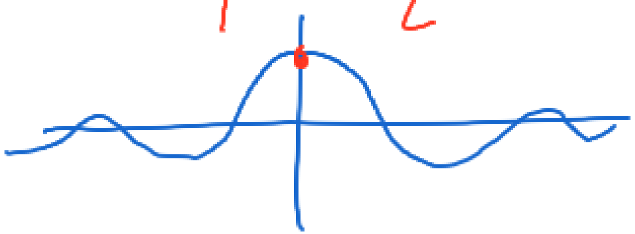
f ist stetig in $D \iff \forall z_0 \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in D$:
wenn $|z - z_0| < \delta$, dann $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

6.7 Bspe a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

denn $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$, daher für $x_n \to 0$

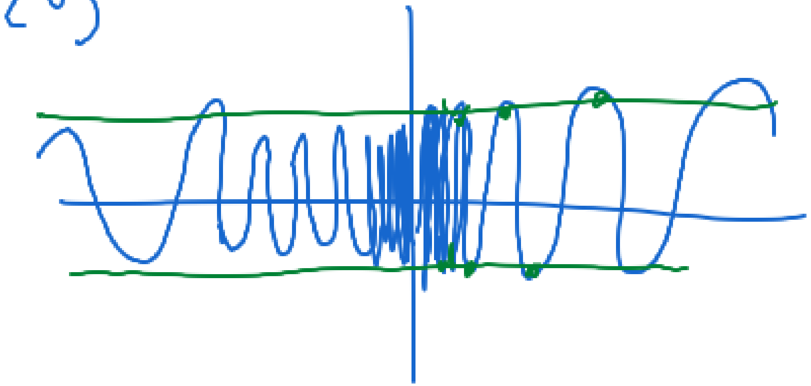


$$1 \ge \frac{\sin x_n}{x_n} \ge \frac{\sin x_n}{x_n} \cdot \frac{x_n}{\tan x_n} = \cos x_n \to 1 \qquad \square$$



Daher ist $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



denn für $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}(2n-1)}$

gilt $x_n \to 0$ und

$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = (-1)^{n+1}$ konv. nicht

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

und es gibt keine st. Fkt. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit f übereinstimmt.