<u>Widh</u> $\quad f: D \to \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{K}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

<u>Def</u> f <u>stetig in $z \in D$</u> $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall w \in D:$

$\left.\text{wenn } |z-w| < \delta, \text{ dann } |f(z) - f(w)| < \varepsilon \right\} (*)$

f <u>st. in D</u> $\Longleftrightarrow \ \forall z \in D: f$ st. in $z \Longleftrightarrow$

$\forall z \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall w \in D: (*)$

<u>Bem</u> $\quad \forall x \ \forall y: A(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \ \forall x: A(x,y)$

$\Longleftrightarrow \forall (x,y): A(x,y)$

Also auch $\quad f$ st. in $D \iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall z \in D\ \exists \delta > 0\ \forall w \in D : (*)$$

$$\not\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D\ \forall w \in D : (*)$$

$\overset{\text{Def}}{\iff} \quad f$ gleichmäßig stetig in D

Beachte $\quad \forall x\, \exists y : A(x,y) \underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} \exists y\, \forall x : A(x,y)$

Unterschied: ob y von x abhängt.

Also $\quad f$ glm. st. in $D \iff \delta$ hängt nicht von z ab.

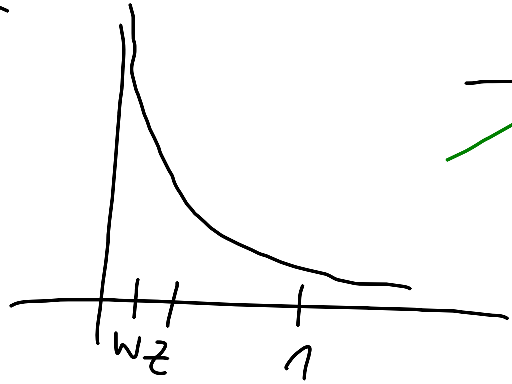
glm. st. $\Rightarrow$ st.

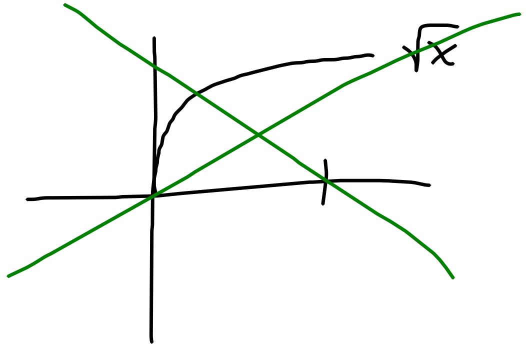
6.10 Bem Nicht jede st. Fkt ist glm. st.

Bsp $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = (0, 1]$, $\varepsilon = 1$

geg. $\delta > 0$, setze $z = \min\{\delta, 1\}$

$w = \frac{z}{2}$, $|z - w| = \frac{z}{2} < \delta$





$$|f(z) - f(w)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{2}{z}\right|$$

$$= \frac{1}{z} \geq 1 \qquad \square$$

6.11 Def $D \subset \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ heißt

beschränkt $\iff$ $\exists R > 0 : \forall z \in D : |z| \leq R$

~~offen~~ $\iff$ $\forall z \in D\ \exists \delta > 0 : B_\delta(z) \subset D$

$$B_\delta(z) = \{w \in \mathbb{K} \mid |z - w| < \delta\}$$

abgeschlossen $\iff$ $D^c := \mathbb{K} \setminus D$ ist offen

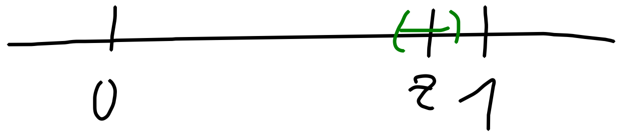
("Komplement von D")

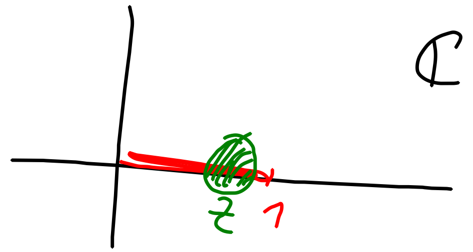
kompakt $\iff$ abg. und beschr.

6.12 Bsp

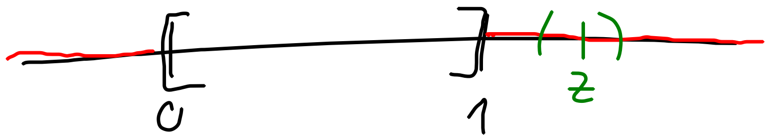
- $D = (0,1)$ ist beschr., offen in $\mathbb{R}$

  nicht offen in $\mathbb{C}$.





- $D = [0,1]$ ist beschr., abg. in $\mathbb{R}$ (und in $\mathbb{C}$), also kompakt



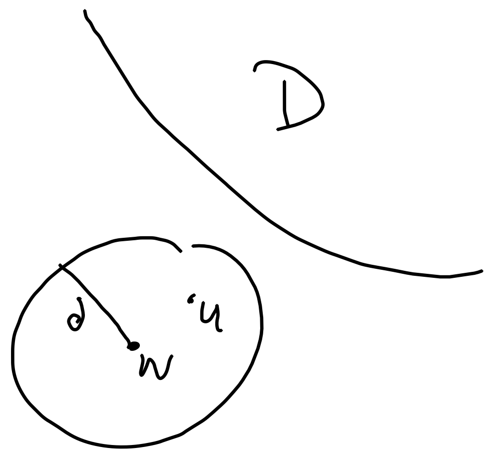
6.14 Prop Äq. sind für $D \subset \mathbb{K}$:

a) D ist abg.

b) $D = \overline{D}$

c) Für jede konv. Folge aus D liegt der Limes in D.

Bew ÜA.



Bem • $\overline{D}$ ist abg., und $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$

Bew $\overline{D} = \{ w \in \mathbb{K} \mid \forall \delta > 0 : B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \}$,

also $\overline{D}^c = \{ w \in \mathbb{K} \mid \exists \delta > 0 : B_\delta(w) \cap D = \emptyset \}$

offen: $w \in \overline{D}^c$, dasselbe δ, zu zeigen $B_\delta(w) \subset \overline{D}^c$

$\forall u \in B_\delta(w)$: $\delta - |u - w| =: r > 0$, dann $B_r(u) \subset B_\delta(w) \subset \overline{D}^c$ □

$\overline{\overline{D}} = \overline{D}$ folgt aus 6.14

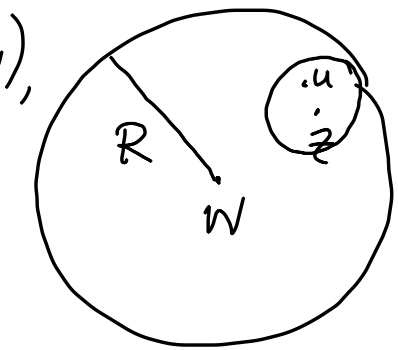
$= \{ z \in \mathbb{K} \mid |z-w| < R \}$

- $B_R(w)$ ist stets offen

<u>Bew</u>: für $z \in B_R(w)$ sei $\delta = R - |z-w|$,

dann $\delta > 0$ und $B_\delta(z) \subset B_R(w)$,

weil

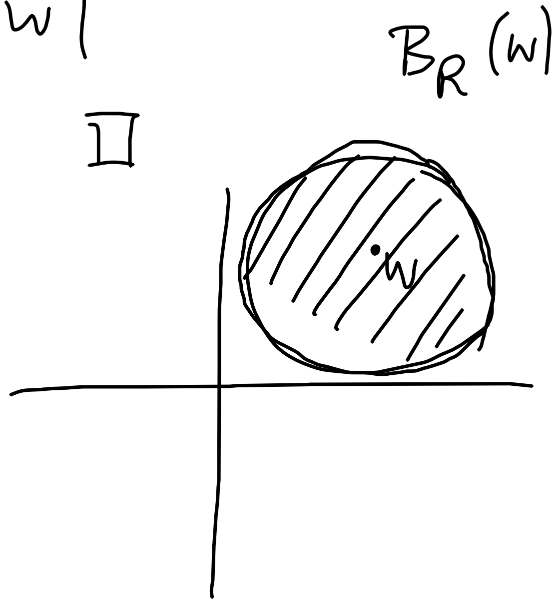


$\forall u \in B_\delta(z)$: $|u-w|$

$$\leq |u-z| + |z-w|$$
$$< \delta + |z-w|$$
$$= R.$$

$\square$

- $\overline{B_R(w)} = \{ z \in \mathbb{K} \mid |z-w| \leq R \}$



~~dann für $z' \notin B_R(w$~~

- D offen $\iff$ enthält keinen Randpunkt

$$D \cap \partial D = \emptyset$$

D abg. $\iff$ enthält alle Randpunkte

$$\partial D \subset D.$$

Die meisten Mengen enthalten manche Randpkte aber nicht alle $\Rightarrow$ weder offen noch abg.

- $\emptyset$ offen
- $\mathbb{K}$ offen (in $\mathbb{K}$)

$\Longrightarrow$ $\mathbb{K}$ abg. (in $\mathbb{K}$), $\emptyset$ abg.

<u>Bem</u> $D \subset \mathbb{R}$ abg $\Rightarrow$ D abg. in $\mathbb{C}$
$D \subset \mathbb{R}$ beschr $\Rightarrow$ D beschr. in $\mathbb{C}$,

$D \subset \mathbb{R}$ kompakt
$\Longrightarrow$ D kompakt in $\mathbb{C}$.

- Seien $M_\alpha \subset \mathbb{K}$ offen, $\alpha \in J$.

  Dann ist $M = \bigcup_{\alpha \in J} M_\alpha$ offen.

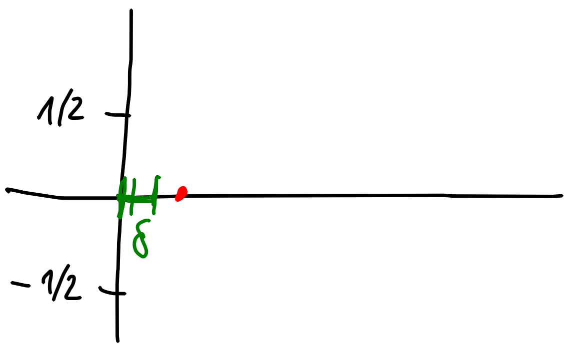
  <u>Bew</u>: $\forall z \in M \ \exists \alpha \in J: z \in M_\alpha$

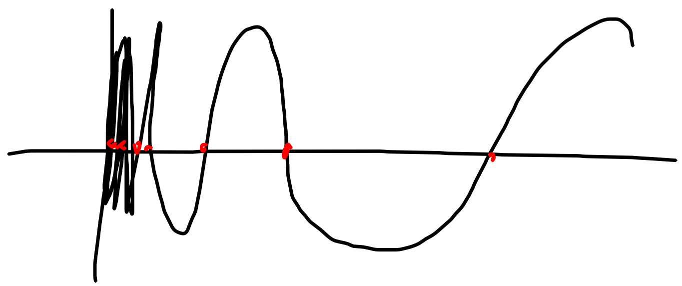
  also $\exists \delta > 0: B_\delta(z) \subset M_\alpha \subset M$. $\square$

Zur glm. Stetigkeit: $D = (0, \infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

ist st. aber nicht glm. st.

$\varepsilon = 1/2$,





6.15 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschr. Folge in $\mathbb{C}$ hat einen HP.

Bew (z_n) in $\mathbb{C}$ beschr., $(\operatorname{Re} z_n)_n$ in $\mathbb{R}$ beschr.

$\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ HP x, TF $(\operatorname{Re} z_{n_k})_k \xrightarrow{k\to\infty} x$

$(\operatorname{Im} z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschr in $\mathbb{R}$ $\overset{BW}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konv. TF $(\operatorname{Im} z_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$

Dann $(z_{n_{k_m}})_m$ konv. $\square$

6.16 Korollar

(z_n) aus Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ hat eine in K konv. TF.

Bew (z_n) beschr $\overset{6.15}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konv TF

K abg $\Rightarrow$ $\lim(\text{TF}) \in K$. $\square$

6.17 Satz Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt,

$f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f glm. st.

Bew s. Skript.

6.18 Satz Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ st.

Dann ist f beschr. und hat Max. und Min.

Bew (für $K = [a,b]$ ÜA, allg. s. Skript).

6.20 Satz Sei $f : K \to \mathbb{K}$ st., $K \subset \mathbb{K}$ kompakt,

Dann ist auch $f(K) = \{ f(z) \mid z \in K \}$ kompakt.

"Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt."

Bew s. Skript.

6.2 Folgen von Fktnen

$D \subset \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

" $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ " ?

Bsp $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Potenzreihe

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \quad \text{Polynom}$$

Frage Wenn f_n st., ist dann auch f st.?

6.21 Def a) „$f_n \to f$ punktweise" $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x \in D: \quad f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$$

b) „$f_n \to f$ gleichmäßig" $:\Longleftrightarrow$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Anders gesagt: $f_n \to f$ pktweise $\Longleftrightarrow$

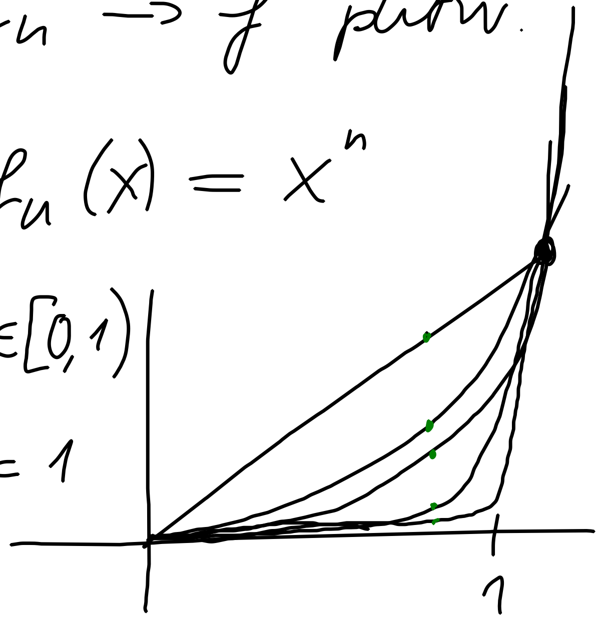
$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \; \exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_{\varepsilon,x}: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \to f$ glm. $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n \geq n_\varepsilon: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

<u>Bem</u> $f_n \to f$ glm $\Rightarrow$ $f_n \to f$ pktw.

<u>Bsp</u> $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

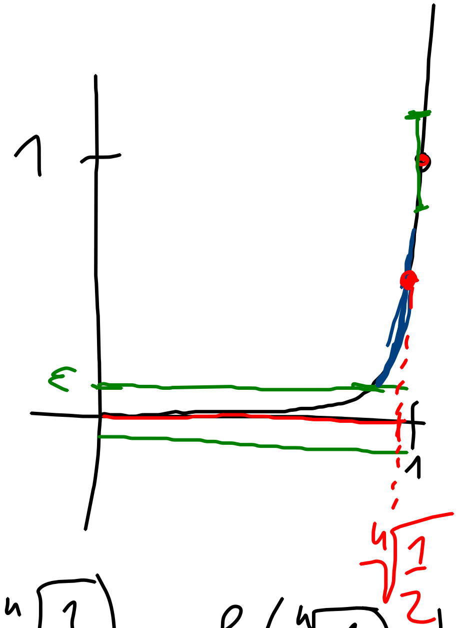


$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

d.h. $f_n \to f$ pktw.

f_n st., f nicht st.

$f_n \not\to f$ glm.



denn $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right) - f\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)\right| = \frac{1}{2}.$$

Notation Norm der Fkt $f : D \to \mathbb{C}$

$$\| f \|_\infty := \sup_{x \in D} | f(x) |$$

„Supremumsnorm"

also $f_n \to f$ glm $\iff$ $\| f_n - f \|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$.