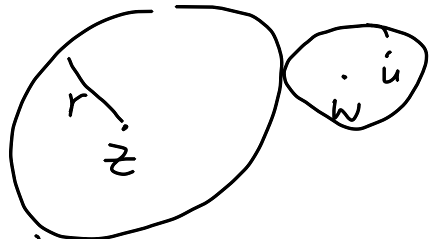
Nachtrag

- $\overline{B_r(z)} = \{ w \in \mathbb{K} \mid |z-w| \le r \}$

denn: $\overline{D} = \{ w \in \mathbb{K} \mid \forall \delta > 0 : B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \}$

Wenn $|z-w| > r$, dann $B_{|z-w|-r}(w) \cap B_r(z) = \emptyset$



(in Formeln: $|u-w| < |z-w| - r$

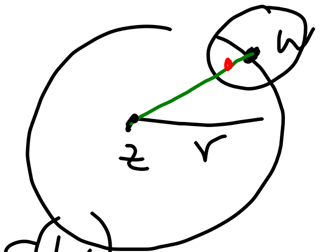
$$\Rightarrow |z-w| \le |z-u| + |u-w|$$

$$< |z-u| + |z-w| - r$$

$$\Rightarrow r < |z-u|$$)

Wenn $|z-w| \le r$, dann entweder $w \in B_r(z)$

oder $|z-w| = r$, und dann

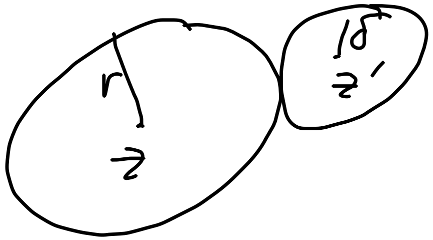


$$z + \left(1 - \frac{\delta}{2r}\right)(w-z) \in B_r(z) \cap B_\delta(w)$$

- $\overline{B_r(z)}$ ist abg.

denn: für $z' \notin \overline{B_r(z)}$ sei $\delta = |z'-z| - r$,

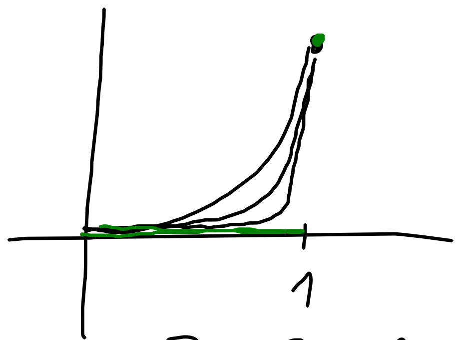
dann $\delta > 0$ und $B_\delta(z') \subset \overline{B_r(z)}^c$



$\square$

$f_n, f : D \to \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C}$

6.23 Satz Wenn $f_n \to f$ glm. und f_n st., dann ist f st.



$[0,1], \ f_n(x) = x^n$

Bew Sei $z_0 \in D$

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D$: wenn $|z - z_0| < \delta$, dann $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Idee: $n = n_\varepsilon$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(z) - f_n(z_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall z \in D: |f(z) - f_{n_\varepsilon}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$

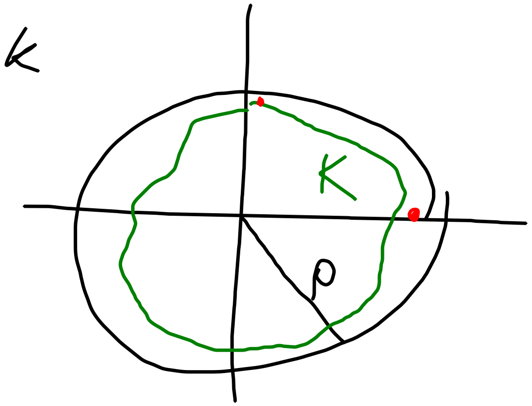
($\exists$ wg. glm. Konv.). Wähle $\delta > 0$ so, dass

$\forall z \in D$: wenn $|z - z_0| < \delta$, dann $|f_{n_\varepsilon}(z) - f_{n_\varepsilon}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ($\exists$ weil f_{n_ε} st.) $\square$

6.24 Korollar Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

habe Konv.radius $\rho > 0$. Die

Folge von Polynomen $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$



konv. glm. auf jedem

Kompaktum K in $B_\rho(0)$ gegen

$f: B_\rho(0) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$,

und f ist stetig.

Bew Sei $K \subset B_\rho(0)$ kompakt. Dann $K \subset B_\tau(0)$ mit $0 < \tau < \rho$,

denn $\sup_{x \in K} |x| = \underbrace{|x_0|}_{=:\tau} < \rho$ für ein $x_0 \in K$, weil die st.

Fkt $x \mapsto |x|$ ihr Max. bei einem $x_0 \in K$ annimmt.

Also

$$\underbrace{\sup_{z\in K} \left| f_n(z) - f(z) \right|}_{\| f_n - f \|_\infty} = \sup_{z\in K} \left| \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k}_{f - f_n} \right|$$

$$\leq \sup_{z\in K} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\left| a_k z^k \right|}_{|a_k| \underbrace{|z|^k}_{\leq r^k}} \leq \cancel{\sup_{z\in K}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$z \in B_r(0)$

weil $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ konv.

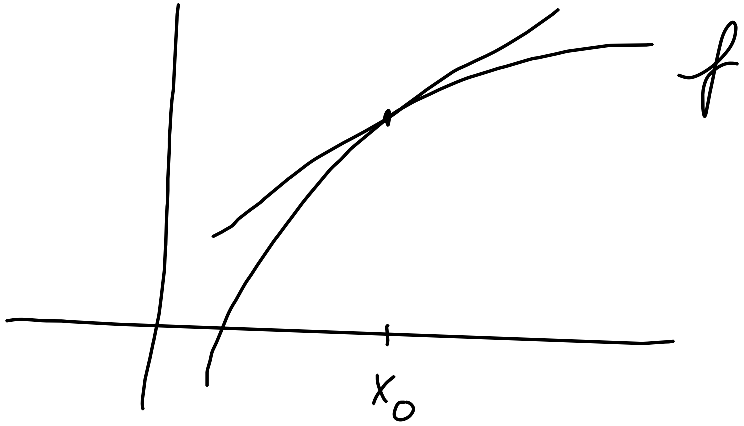
$\square$

und f ist st. auf $B_\rho(0)$.

Kap 7: Differentialrechnung

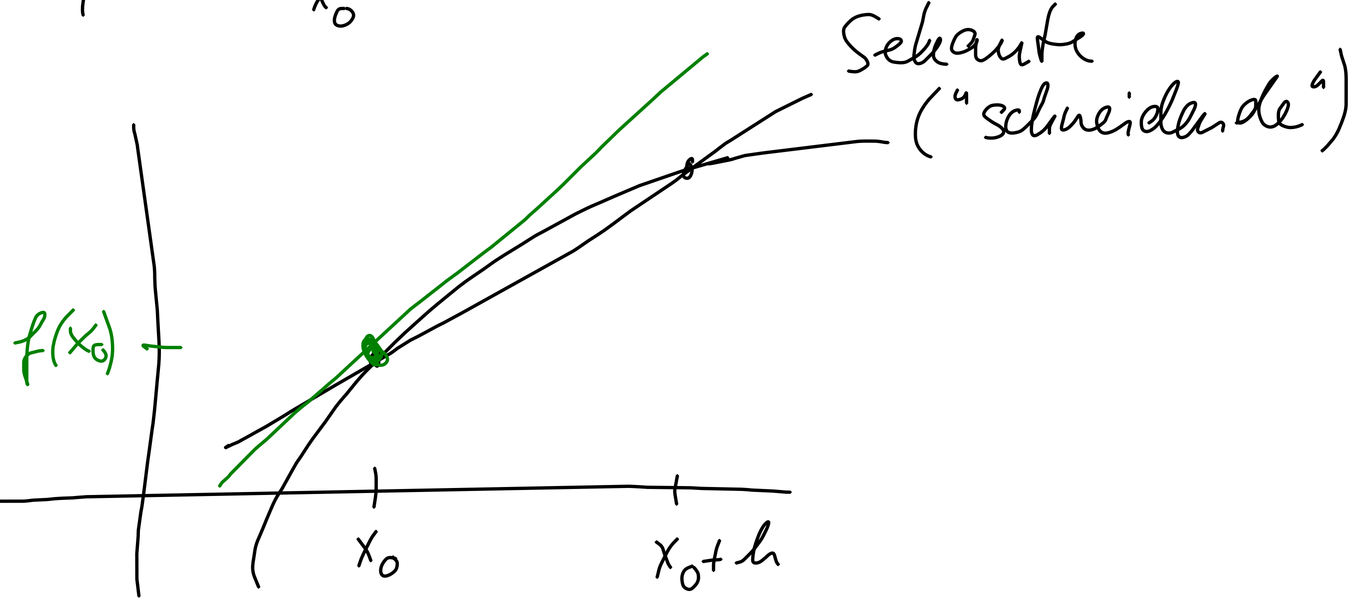
7.1 Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

Tangentenproblem
("berührende")



$\exists$ Tangente in x_0?
eind?
Steigung = ?

= Steigung der Sekante



$$= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

"Differenzenquotient"

7.2 Def Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{C}$,

heißt in $x_0 \in I$ differenzierbar $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{def. für } x \in I \setminus \{x_0\}} =: \underbrace{f'(x_0) =: \frac{df}{dx}(x_0)}_{\text{"Differentialquotient"}}$$

$f': x_0 \longmapsto f'(x_0)$ "Ableitung von f",

$f': \{x_0 \in I \mid f \text{ ist diff'bar in } x_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

7.4 Satz f ist in x_0 diff'bar $\Longleftrightarrow$

$\exists a \in \mathbb{C}: \forall x \in I: \; f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

"f ist linear approximierbar", d.h.

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + a(x-x_0)}^{\text{linear}} + \overbrace{\varphi(x-x_0)}^{\text{"Rest"}} \quad \text{und}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0 \qquad \left(\text{"}\varphi(h) = o(|h|)\text{"}\right)$$

Bew Wenn f in x_0 diffbar, dann wähle $a = f'(x_0)$,

$$\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - a\cancel{(x-x_0)}\, h, \text{ also}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} - a = 0$$

Wenn f lin. appr.bar, dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0} = a$$

$\Longrightarrow$ f diffb. in x_0 und $f'(x_0) = a$. $\square$

7.5 Def $f: I \to \mathbb{C}$ heißt diffbar $\Leftrightarrow$

f ist in jedem $x_0 \in I$ diffbar.

7.6 Satz Wenn f diffbar in x_0, dann ist

f st. in x_0

Bew

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \Big[f(x_0) + a\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\varphi(x - x_0)}_{\to 0} \Big]$$

$$= f(x_0). \qquad \square$$

7.7 Bspe a) $f(x) = c \quad \forall x \Rightarrow f'(x_0) = 0 \ \forall x_0$

denn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c - c}{x - x_0} = 0.$

b) $f(x) = x \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \quad \forall x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

c) $f(x) = x^2 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \forall x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0 .$$

<u>7.8 Satz</u> $\exp' = \exp$

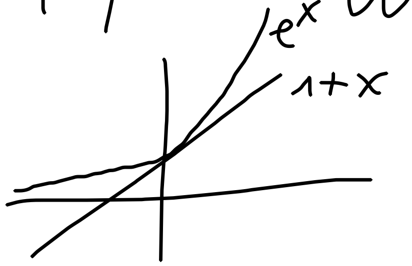
<u>Bew</u> Erster Teil: $\frac{d \exp}{dx}(0) = 1$, d.h. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

wir zeigen $\underbrace{\frac{1}{1+|x|}}_{\to 1} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{1-|x|}}_{\to 1} \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

Dazu Satz 3.3 g) $\forall x \in (-1,1)$:

$$|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{1-|x|} \quad \Rightarrow \text{re. Ungl.}$$

3.3 c) $e^x \geq 1 + x$



Für $x>0 \Rightarrow \quad \dfrac{e^x - 1}{x} \geq \cancel{x}\; 1$

Für $x<0 \Rightarrow \quad e^{-x} \geq 1 - x \Rightarrow e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \quad e^x - 1 \leq \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

2. Teil:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \underbrace{\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} 1} \xrightarrow{x \to x_0} e^{x_0}.$$

also $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$. $\square$