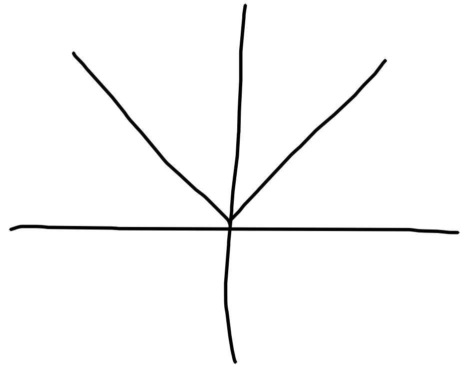
Differentiation

7.9 Bsp abs : $x \mapsto |x|$



diffbar für $x \neq 0$

$$\text{abs}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

nicht diffbar in $x = 0$ (keine eind. Tangente)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \text{---} \;"\; \text{---} = 1, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} = -1$$

7.10 Satz Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$, diffbar in $x_0 \in I$

a) Für $a, b \in \mathbb{C}$ ist $af + bg$ diffbar in x_0 und $(af+bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$

"linear"

b) fg ist diffbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Produktregel = Leibniz-Regel.

c) Wenn $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ diffbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Quotientenregel

<u>Beweis</u> a) aus Linearität des $\lim\limits_{x \to x_0}$

b) Prod.regel:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \underbrace{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}}_{\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{\to g(x_0)}}$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

$\Longrightarrow$ Beh

c) Quotientenregel: $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{g}$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{-1}{g(x) \cdot g(x_0)}}_{\longrightarrow \frac{-1}{g(x_0)^2}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\longrightarrow g'(x_0)}$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

dann Prod. regel. $\square$

<u>7.11 Satz</u>: Kettenregel; sei $f: I \to \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$ diffbar in $y_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $g: J \to I$ diffbar in $x_0 \in J \subset \mathbb{R}$, $g(x_0) = y_0$. Dann ist $f \circ g: J \to \mathbb{C}$ diffbar in x_0 und

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

<u>Beweis</u> Falls $g'(x_0) \neq 0$:

Dann $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ in einer Umg. von x_0

also ist $g(x) \neq g(x_0)$ in einer Umg. von x_0. Daher

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\longrightarrow g'(x_0)}$$

$$= \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \longrightarrow f'(y_0) = f'(g(x_0)).$$

Falls $g'(x_0) = 0$:

$$|f(y) - f(y_0)| = |f'(y_0)(y - y_0) + \varphi(y - y_0)|$$

$$\leq \underbrace{|f'(y_0)(y - y_0)|}_{= |f'(y_0)|\,|y - y_0|} + \underbrace{|\varphi(y - y_0)|}_{< \varepsilon |y - y_0|}$$

für $y \in B_\delta(y_0)$

$$< \underbrace{(|f'(y_0)| + \varepsilon)}_{L} |y - y_0|$$

$$\left| \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \right| \leq \frac{L\, |g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} \xrightarrow{x \to x_0} L |g'(x_0)| = 0$$

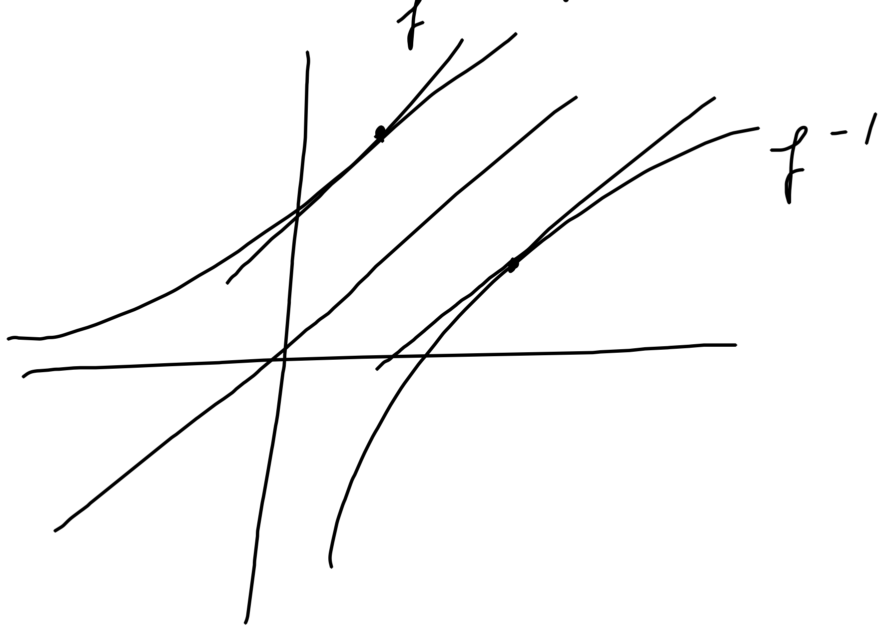
$$\Longrightarrow (f \circ g)'(x_0) = 0$$

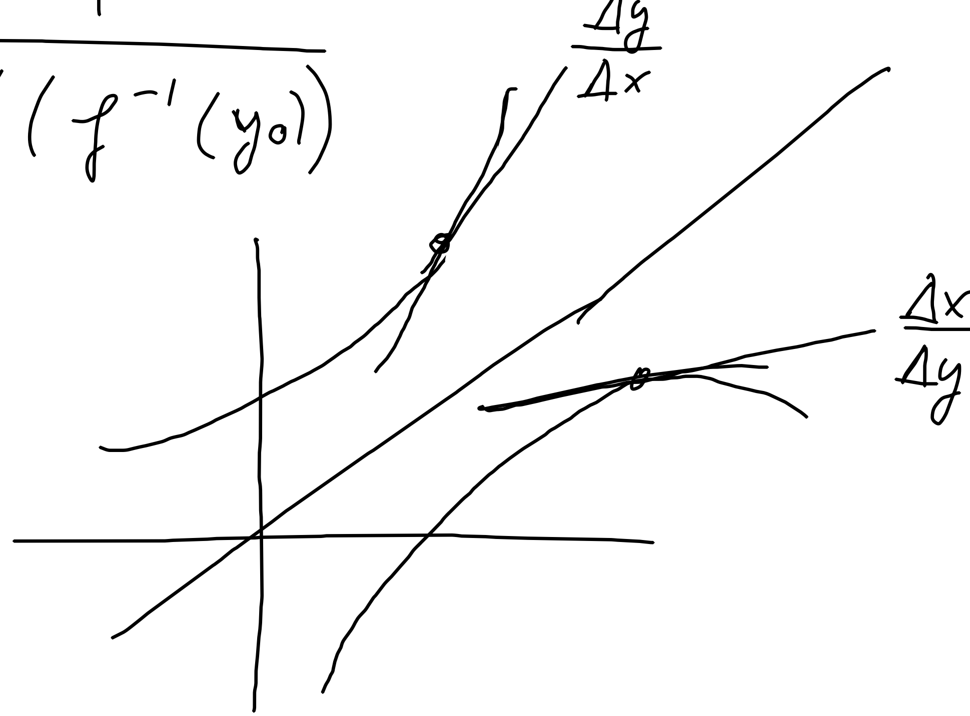
$\square$

7.12 Satz (Abl. der Umkehrfkt)

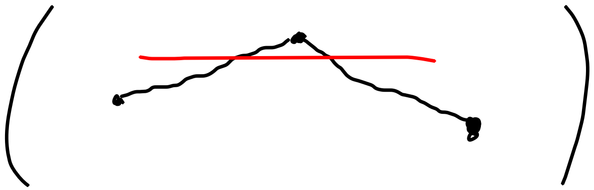
Sei $f: I \to J$ st. und bij., diffbar in $x_0 \in I$, $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}: J \to I$ diffbar in $y_0 := f(x_0) \in J$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$





Bew f st. und bij $\xRightarrow{\text{Zwischenwertsatz}}$ f monoton



Satz 3.11 $\Longrightarrow$ f^{-1} st.

Sei $y_n \in J \setminus \{y_0\}$, $y_n \longrightarrow y_0$

Dann $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \longrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$

f diffbar in x_0 $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

7.13 Bspe a) $f_n(x) := x^n,\ n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow f_n'(x) = n\, x^{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

$$f_0'(x) = 0$$

Beweis durch Induktion: Anker $n=0$: klar

Schritt $n \Rightarrow n+1$:

Produktregel

$$f_{n+1}' = (x f_n)' = 1\, f_n + x\, f_n'$$

$$= x^n + x\, n\, x^{n-1} = (n+1)\, x^n \quad \square$$

Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1}$

$m = k-1$

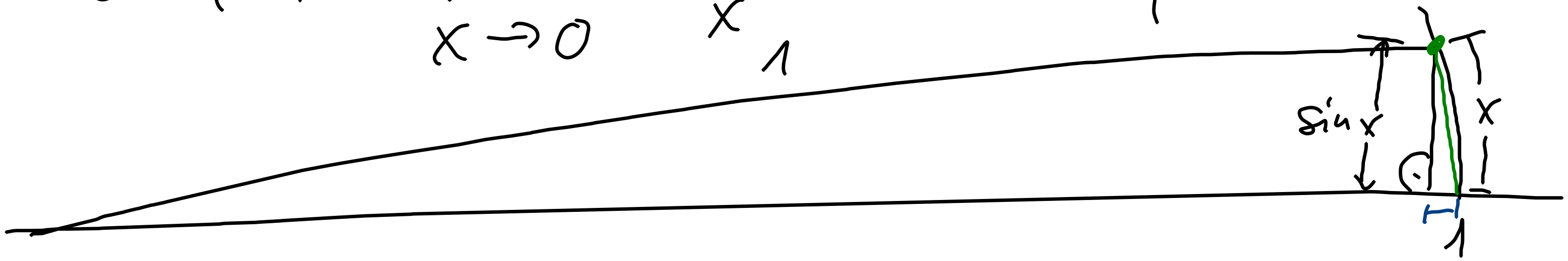
$$= \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)\, a_{m+1}\, x^m$$

b) $$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)}$$

$$= \frac{1}{y}.$$

c) <u>sin und cos:</u>

$$\sin'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{(hatten wir schon)}$$



$$|\sin x| \leq |x|$$

$$\Longrightarrow \quad \cos'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

weil $\cos x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq 1 - \cos x = 1 - \cos 2\frac{x}{2}$

$$\left[\ \cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2\varphi\ \right]$$

$$0 \le 1 - \cos 2\tfrac{x}{2} = 1 - \left(1 - 2\sin^2\tfrac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\tfrac{x}{2} \le 2\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

also
$$\underbrace{-\frac{|x|}{2}}_{\to 0} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le \underbrace{\frac{|x|}{2}}_{\to 0}$$

Additionsthme $\Longrightarrow$

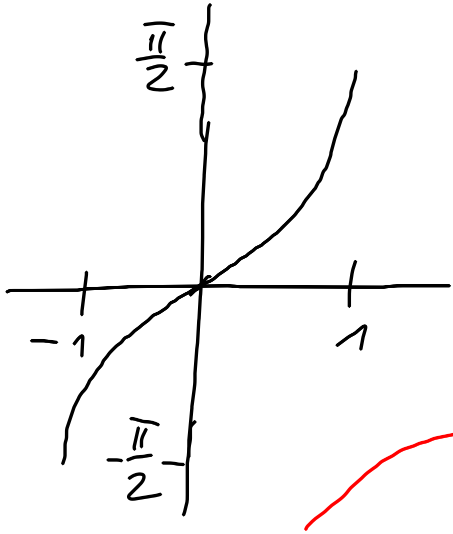
$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

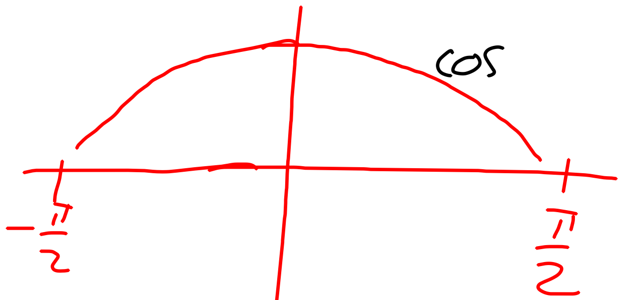
$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h \cancel{x}}}_{\to 1} \right)$$

$$= \cos x,$$

ebenso $\cos' x = - \sin x$



d) Für $\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}}$$

$+$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

e) $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

Optimierung

7.14 Def Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$

f hat bei x_0 ein (striktes) lokales Maximum $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I \setminus \{x_0\}: \quad f(x) \leq f(x_0)$$

$<$

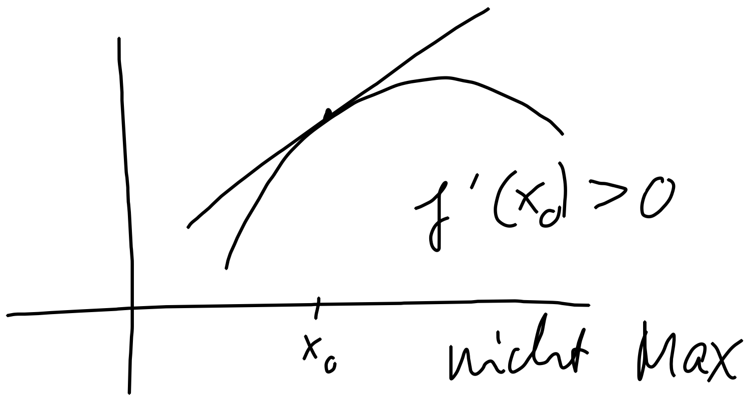
(striktes) lokales Min.

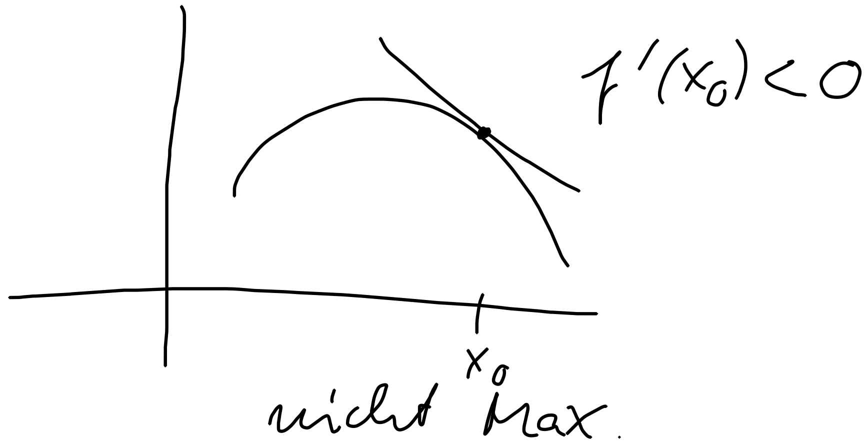
$>$

$\geq$

7.15 Satz (notw. Kriterium für lokales Extremum)

Sei I ein offenes Intervall. Hat $f : I \to \mathbb{R}$ bei x_0 ein lok. Max. oder Min und ist f bei x_0 diffbar, dann $f'(x_0) = 0$.





Bew Sei x_0 lok. Max.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

ebenso $\lim_{x \to x_0,\, x < x_0} \geq 0$ also $f'(x_0) = 0$