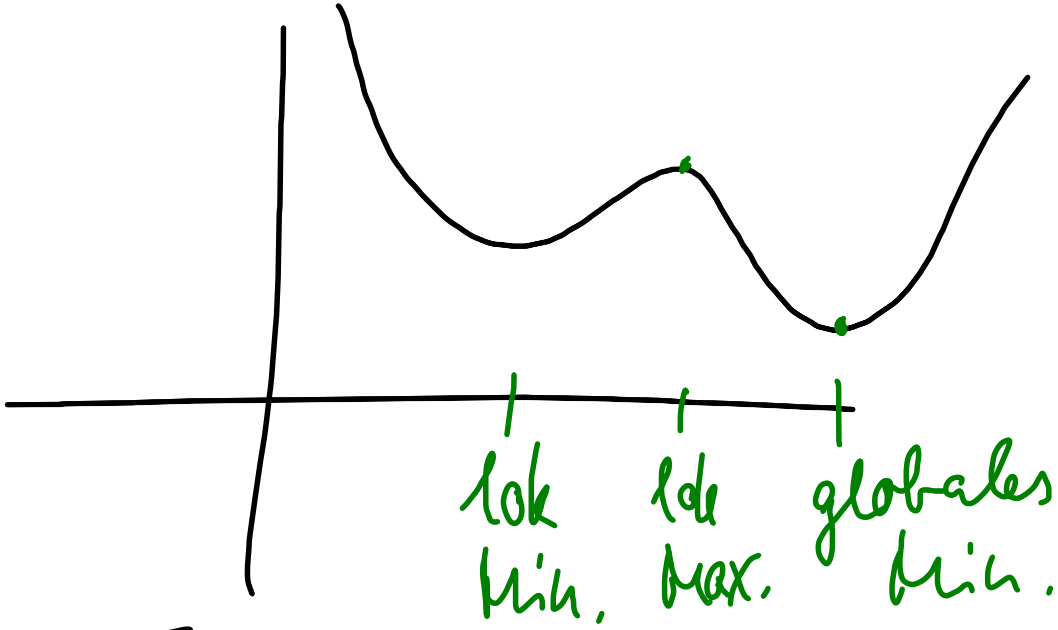
Optimierung



Folgerung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Wenn $f(x_0) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ oder $f(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$,

dann 1) $x_0 \in \{a, b\}$ oder

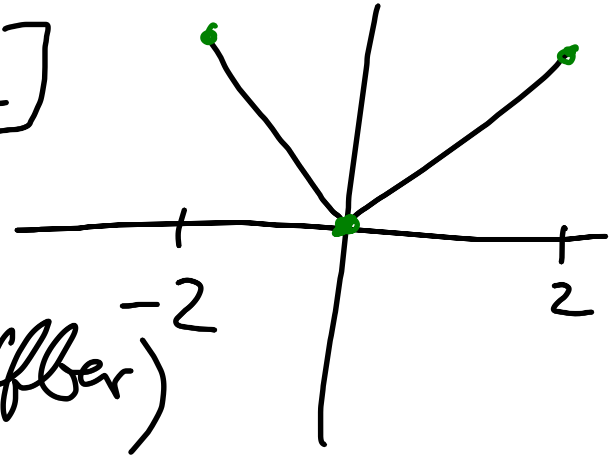
2) $f'(x_0) = 0$ oder

3) f ist nicht diffbar in x_0.

(x_0 heißt dann <u>globales Max.</u> bzw. Min.)

Bew Sei $f(x_0) = \max f(x)$. Wenn $x_0 \in (a,b)$, dann ist es ein lok. Max.; f diffbar in $x_0 \xrightarrow{7.15} f'(x_0)$. $\square$

Bsp
- $f(x) = |x|$, $[a,b] = [-2,2]$



2 glob. Maxima bei ± 2

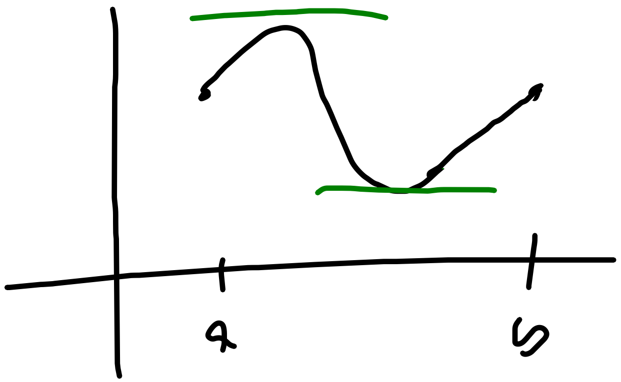
1 glob. Minimum bei 0 (nicht diffbar)

- Methode, alle glob. Maxima zu finden:
  - Finde alle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ oder f nicht diffbar ("kritische Punkte")
  - An diesen Punkten und a, b, berechne $f(x)$
  - Der höchste Wert ist $\max f$, und nur an diesen Punkten wird er angenommen.

7.2 Der Mittelwertsatz

7.16 Satz von Rolle (Michel Rolle, 1652–1719)

Sei $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) diffbar, $f(a)=f(b)$. Dann $\exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0)=0$



Bew Falls $f(x)=\text{const.}$, dann $f'(x_0)=0 \ \forall x_0\in(a,b)$.

Sonst $\sup f > f(a)$ oder $\inf f < f(a)$

$\xRightarrow[f \text{ st.}]{[a,b] \text{ kompakt}}$ $\sup f = f(x_0)$ oder $\inf f = f(x_0)$

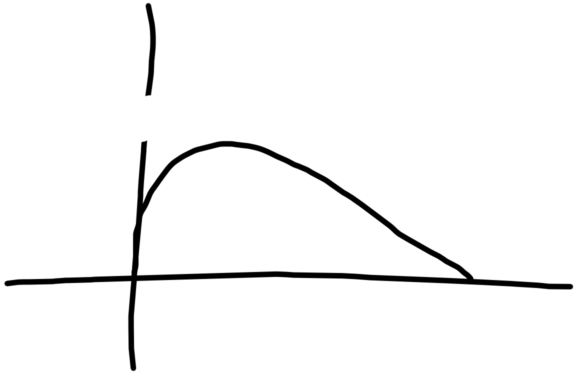
für ein $x_0 \in (a,b) \xRightarrow{7.15} f'(x_0)=0$. $\square$

<u>Bsp</u> $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x} - x$ ist st.

in $(0,1)$ diffbar

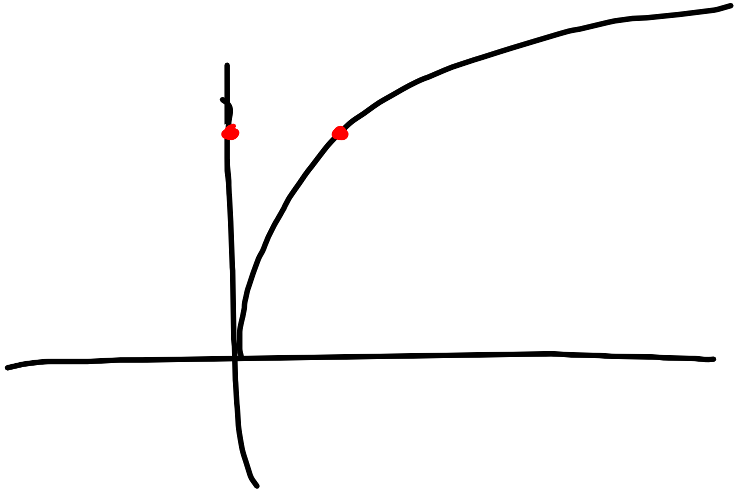
$f(1) = 0 = f(0)$



$g(x) = \sqrt{x}$

diffbar in $(0, \infty)$

nicht in 0.



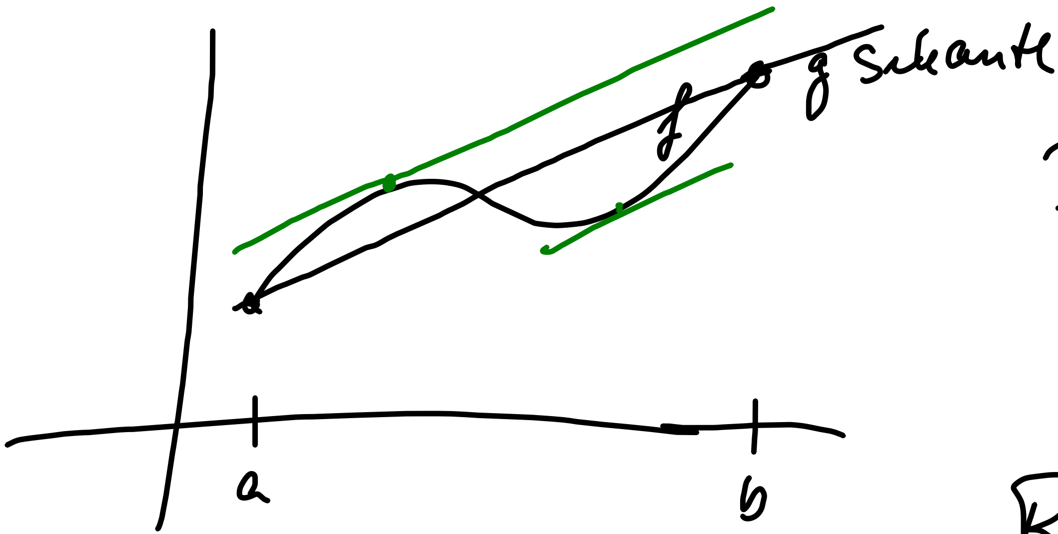
x^{π}, $\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$ für $x > 0$

$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$ für $x > 0$

7.17 Mittelwertsatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar

Dann $\exists x_0 \in (a,b) : \quad f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$



Bew

$$g(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Sekante

Rolle für $h(x) := f(x) - g(x)$

$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b)$

$h(a) = 0, \quad h(b) = 0$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (a,b) : \quad 0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \square$

7.18 Korollar

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar

$$\left[\forall x \in (a,b): f'(x) = 0\right] \Longleftrightarrow f = \text{const.}$$

Bew: ÜA

7.19 Bem

$f' = g'$ auf (a,b)

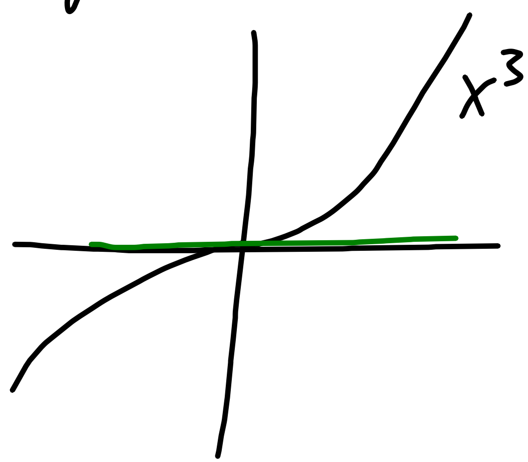
$\Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}: f = g + C$ auf (a,b)

Bew $(f-g)' = 0 \overset{7.18}{\Longrightarrow} f - g = \text{const.}$ $\square$

7.20 Korollar Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ st., diffbar in (a,b).

a) f wachsend auf $[a,b]$ $\iff$ $\forall x\in(a,b): f'(x)\geq 0$.

b) Wenn $\forall x\in(a,b): f'(x)>0$, dann ist f streng wachsend.



Bsp $f(x)=x^3$, $[a,b]=[-1,1]$

streng wachsend

hat $f'(0)=0$

Bew a) $\Rightarrow$: $x_0<x$ $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \Rightarrow f'(x_0)\geq 0.$

$\Leftarrow$: MWS: $a \leq x < y \leq b$ dann

$$\exists \underset{\text{xi}}{\xi} \in (x,y): \quad f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$f'(\xi) \geq 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) \geq 0$$

$$\Longrightarrow f(y) \geq f(x)$$

b) $f'(\xi) > 0 \Longrightarrow f(y) > f(x)$ $\square$

7.22 ~~Ver~~ verallg. Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ st., diffbar in (a,b)

Wenn $\forall x \in (a,b);\ g'(x) \neq 0$, dann $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

$[\ g(x) = x \implies \text{MWS}\ ]$

<u>Bew</u> 1) $g(b) - g(a) \neq 0$ sonst nach Rolle $g'(x) = 0$ irgendwo

2) Setze $h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

h st., diffbar in (a,b), $h(a) = f(a) = h(b)$

Rolle
$\Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a,b): \quad 0 = h'(x_0)$

$$= f'(x_0) - (g'(x_0)) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$\Longrightarrow$ Beh $\square$

7.3 Taylorreihen

<u>Bsp</u> $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

<u>7.23 Def</u> Sei $f: I \to \mathbb{C}$ diffbar.
Ist f' diffbar, so heißt f'' die <u>2te Ableitung</u>

und f <u>2mal differenzierbar</u> auf I

Entspr. n-te Abl. $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

$$f^{(0)} = f$$

<u>Notation</u> $f'' = f^{(2)} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2}$

$$f^{(n)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \frac{d^n f}{dx^n}$$

<u>7.24 Satz</u> f, g beide n-mal diffbar, dann

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

<u>Bew</u> s. Skript $\square$

7.25 Def I offenes Intervall,

$f : I \to \mathbb{C}$ heißt <u>stetig diffbar</u>

$\iff$ f diffbar und f' stetig

f heißt <u>n-mal stetig diffbar</u> $\iff$ $f^{(n)}$ existiert

und ist st.

$$\underline{C^n(I)} := \{ f : I \to \mathbb{C} \mid n\text{-mal st. diffbar} \}$$

<u>glatte Fktnen</u> $\in \underline{C^\infty(I)} := \{ f : I \to \mathbb{C} \mid \text{bel. oft st. diffbar} \}$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(I)$$

Taylorreihen: Bsp $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

lässt vermuten

$$f'(x) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} n\, c_n\, x^{n-1} \quad \text{und}$$

$$f''(x) = \sum_{n=\cancel{1}\,2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, c_n x^{n-3}, \quad \text{daher}$$

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$\ldots\ldots \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

7.26 Satz ~~z~~ von Taylor

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $x_0 \in I$. Dann $\forall x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom von Grad } n \quad T_n(x,x_0)} + R_n(x,x_0)$$

wobei $R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

mit $x_0 < \xi < x$ oder $x < \xi < x_0$ oder $x = \xi = x_0$.