$$T_n^f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

7.26 Satz von Taylor: Wenn $f \in C^{n+1}(I)$,

$x_0 \in I$, dann

$$f(x) = T_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$$

wobei $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

ξ zwischen x und x_0

7.27 Bem für $n=1$ ähnlich wie linear approximierbar

$\varphi = R_1$

Unterschiede

	Satz 7.4	Satz 7.26
Vor:	f diffbar in x_0	$f \in C^2(I)$
	$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x, x_0)}{x - x_0} = 0$	$R_1 = (\text{faktor}(x))(x - x_0)^2$

Bsp $R_1 = |x - x_0|^{1,5}$

Bew d. Satzes von Taylor: Wähle $x, x_0 \in I$. Setze

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$G(t) := \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

vMWS: $\exists\, \xi$ zwischen x und x_0: $$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

Hier $$F'(t) = \underbrace{-f'(t)}_{k=0} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \cancel{+} - \frac{f^{(k)}(t)}{\cancel{k!}\ (k-1)!} \cancel{k}(x-t)^{k-1} \right)$$

$$= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$G'(t) = \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}(-1) = - \frac{(x-t)^n}{n!}$$

Also $F(x)=0$, $G(x)=0$,

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f^{(n+1)}(\xi)$$

also $F(x_0) = f^{(n+1)}(\xi)\, G(x_0)$

also $R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, QED $\square$

<u>Korollar</u> Für $f \in C^{n+1}(I)$, $x_0, x \in I$ gilt

$$f(x) = T_n(x, x_0) + O\left(|x-x_0|^{n+1}\right)$$

<u>Bew</u> $O(|x-x_0|^{n+1})$ heißt $\leq C\,|x-x_0|^{n+1}$

$\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I$

Setze $C = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\xi \in B_\varepsilon(x_0) \cap I} |f^{(n+1)}(\xi)|$ für $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \cap I$ kompakt. $\square$

7.28 Korollar Sei $f \in C^{n}(I)$, $x_0, x \in I$,

$$f(x) = T_n(x, x_0) + o(|x - x_0|^n)$$

statt $O(|x-x_0|^{n+1})$

Bew Taylor$_{n-1}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in I\ \exists \xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)\right) \xrightarrow[f^{(n)} \text{ st.}]{x \to x_0} 0 \qquad \square$$

Def Für $f \in C^\infty(I)$ heißt

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die Taylorreihe von f mit Entwicklungspkt x_0.

($x_0 = 0$ "Maclaurin-Reihe")

F1: Konv. $T_f(x)$?

F2: Ist $T_f(x) = f(x)$? $\iff$ $R_n(x, x_0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Bem Jedes Poly $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ lässt sich als

$$\sum_{l=0}^{n} \beta_l (x - x_0)^l$$ schreiben (x_0 bel.)

Denn $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \underbrace{\left((x-x_0)+x_0\right)^k}_{\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (x-x_0)^\ell x_0^{k-\ell}}$

"Entwicklung von p um x_0"

- Für $f = p$ ist $T_m(x, x_0) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k (x-x_0)^k$,

insbes. für $m \geq n$ gilt $T_m = p$.

Also ist T_p eine abbrechende Reihe (endl. viele Terme $\neq 0$), also konv.,

$T_p(x) = p(x)$.

7.29 Korollar $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Bew $\exp^{(n)} = \exp$, $x_0 = 0$, Satz von Taylor $\Rightarrow$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x, x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi_n(x)} x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{mit } |\xi_n(x)| < |x|$$

$\Rightarrow \quad 0 < e^{\xi_n} \leq e^{|x|}$, daher

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\underline{|R_n(x)|}} \leq e^{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \square$$

7.31 Bsp cos und sin

$$\cos' = -\sin$$

$$\cos'' = -\cos$$

$$\cos''' = +\sin$$

$$\cos'''' = \cos, \qquad \cos^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{für } m = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{für } m = 2k+1 \end{cases}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow \cos^{(2k+1)}(0) = 0$, also

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{(-1)^{n+1} \sin(\xi) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{R_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0}, \text{ also}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \text{ ebenso } \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

7.33 Bsp Nicht jede Taylorreihe konv. überall. Bsp: $\frac{1}{1-x}$

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1)$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 3!\,(1-x)^{-4}$$

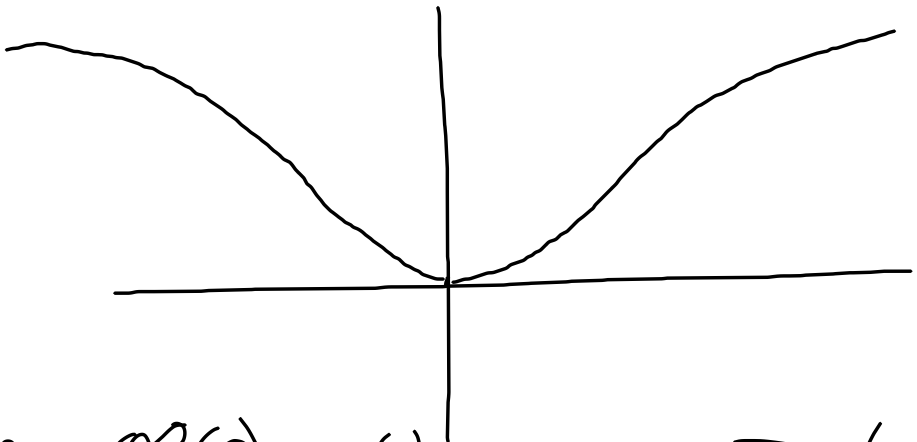
$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$$

$x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = n!$

$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat Konv. radius $\rho = 1$.

7.32 Bsp Selbst wenn T_f konv., dann nicht unbed. gegen f.

Bsp $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



Beh $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(0) = 0$, $T_f(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 x^k = 0$

Bew s. Skript.

Differentiation von Potenzreihen

Wissen $\frac{d}{dx}\text{Poly} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k x^{k-1}$$

"gliedweise Differentiation"

Versuchen $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{k=\cancel{0}}^{\infty} k\alpha_k x^{k-1}$

Bsp $\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cancel{(2k+1)}\frac{x^{2k}}{\cancel{(2k+1)!}} = \cos x$$

$(2k)!$

7.34 Satz

1) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k(x-x_0)^{k-1}$ hat denselben Konvradius ~~von~~ $\rho \in (0,\infty]$ wie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x-x_0)^k$.

2) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x-x_0)^k$ ist diffbar in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$

und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k(x-x_0)^k$.

3) $\Rightarrow f \in C^{\infty}((x_0-\rho, x_0+\rho))$

$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x-x_0)^k$ ist die Taylorreihe von f in x_0.

Bew Skript.

7.35 Satz Wenn $f_n \to f$ pktw.

$f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ st. diffbar

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ st.

$f_n' \to g$ glm., $g : [a,b] \to \mathbb{C}$

Dann ist f st. diffbar und $f' = g$.

Bew Skript.