7.37 Satz (2te-Ableitung-Test)

Sei J = offenes Intervall, $f \in C^2(J)$

a) Hat ~~da~~ f bei $x_0 \in J$ ein lok. Max., (Min.)

dann $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ (≥ 0)

b) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, (> 0)

dann hat f bei x_0 ein lok. Max. (Min.)

Bew ÜA.

7.38 Regel von de l'Hospital

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar,

$-\infty \leq a < b \leq \infty$, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$

oder $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, dann

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls $\exists$ RS. Ebenso für $x \to b$.

Beweis für $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ für $a \in \mathbb{R}$.

Setze $f(a) := 0 =: g(a)$

$\Rightarrow f, g$ st. auf $[a, b)$

vMWS $\forall x \in (a,b)$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

mit $a < \xi < x$

Jetzt $x \to a \Rightarrow \xi \to a \Rightarrow$ Beh $\square$

Bsp $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$.

Kap 8 : Integration

1684 G.W. Leibniz

I. Newton

Definition 1854 B. Riemann

1902 H. Lebesgue

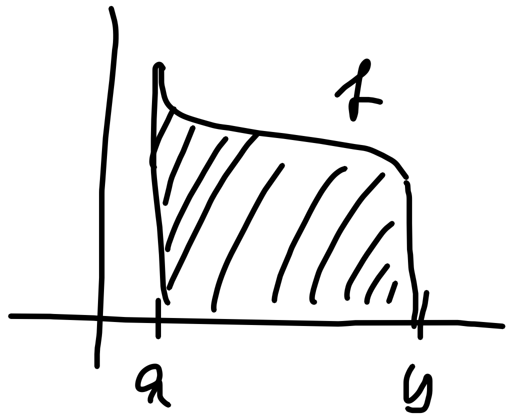
→ 1960 N. Bourbaki ("Regelintegral")

"Regelfunktionen",

fonctions réglées

Geom. Bedeutung $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

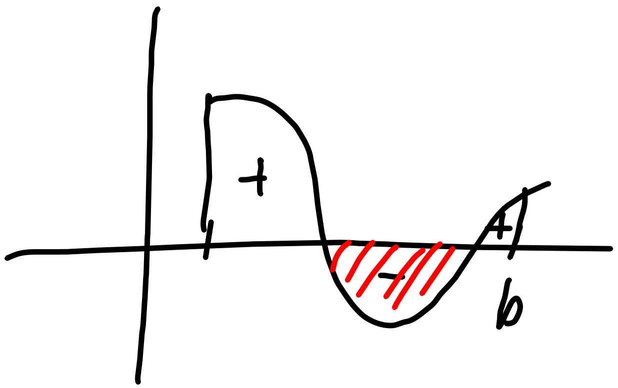
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Flächeninhalt}$$



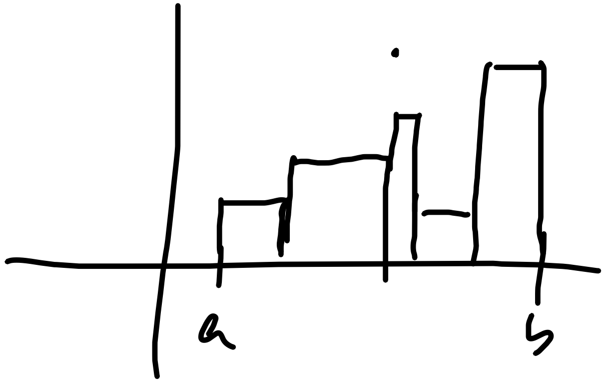
von $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\right\}$

falls $f(x)\ge 0$

allg: signierter Flächeninhalt



Treppenfunktion



8.3 Def

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfkt

$\iff \exists\; a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{\cancel{k}K} = b$:

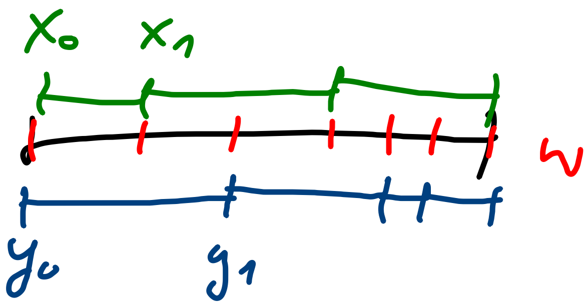
φ ist auf $I_k := (x_{k-1}, x_k)$ konstant $= \varphi_k$,

$k = 1 \dots K$.

8.4 Prop Sind φ, ψ Treppenfktnen, dann auch $|\varphi|$, $c\varphi$, $\varphi+\psi$, $\varphi\psi$ $\forall c \in \mathbb{C}$

Bew auf I_k ist $|\varphi(x)| = |\varphi_k|$

$$c\varphi(x) = c\varphi_k$$



Sei $\varphi = \varphi_k$ auf $I_k = (x_{k-1}, x_k)$

und $\psi = \psi_\ell$ auf $\tilde{I}_\ell = (y_{\ell-1}, y_\ell)$

$$\{w_0, w_1, w_2, \dots, w_M\} = \{x_0, x_1 \sim x_K\} \cup \{y_0, y_1, \dots, y_L\}$$

"gemeinsame Verfeinerung der Unterteilung"

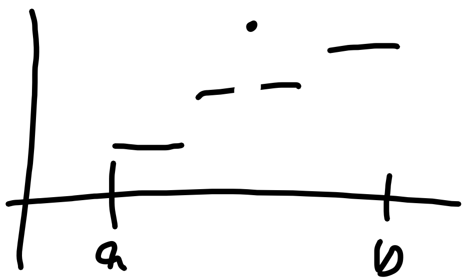
$$\Rightarrow \quad \varphi(x) + \psi(x) = \varphi_{k(m)} + \psi_{\ell(m)}$$

auf (w_{m-1}, w_m)

für geeignete $k(m), \ell(m)$.

ebenso $\varphi(x)\psi(x)$. $\square$

<u>8.5 Def</u> Treppenfktnen φ, ψ auf $[a,b]$ heißen äquivalent $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x) \neq \psi(x)$ nur für für endl. viele $x \in [a,b]$



8.6 Def $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{K} \varphi_k (x_k - x_{k-1})$

Notation auch $\displaystyle\int \varphi = \int_a^b \varphi(x)\,dx$

8.7 ~~Def~~ Prop Äq. Treppenfktnen haben gleiches Integral.

Bew Seien φ, ψ äq., $\{w_0, w_1, \ldots, w_M\}$ gemeins. Verf.

$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J_m = (w_{m-1}, w_m)$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} \varphi_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{k(m)} (w_m - w_{m-1})$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \psi_{l(m)} (w_m - w_{m-1}) = \sum_{l=1}^{L} \psi_l (y_l - y_{l-1}) = \int_a^b \psi(x)\,dx \quad \square$$

8.8 Prop Seien φ, ψ Treppenfkt, $c \in \mathbb{C}$

a) $\int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$

$\int_a^b c\varphi(x)\,dx = c \int_a^b \varphi(x)\,dx$

Linearität

b) Wenn $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b] : \varphi(x) \leq \psi(x)$,

dann $\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$ Monotonie

c) "Dreiecksungleichung":

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leq \underbrace{\|\varphi\|_\infty}_{\sup_x |\varphi(x)|} (b-a)$$

<u>Bew</u> a) $\int(\varphi+\psi) = \sum_{m=1}^{M} (\varphi_{k(m)} + \psi_{\ell(m)})(w_m - w_{m-1})$

$$= \int\varphi + \int\psi, \quad (\varphi \text{ klar}$$

b) $\int\varphi = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{k(m)} (\underbrace{w_m - w_{m-1}}_{>0})$

$$\leq \sum_{m=1}^{M} \psi_{\ell(m)} (w_m - w_{m-1}) = \int\psi$$

c) $\left|\int\varphi\right| = \left|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k (x_k - x_{k-1})\right|$

$$\leq \sum_{k=1}^{K} |\varphi_k| \underbrace{|(x_k - x_{k-1})|}_{(x_k - x_{k-1})} = \int|\varphi|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{K} \left(\max_{j=1}^{K} |\varphi_j| \right) (x_k - x_{k-1})$$

$$= \max_j |\varphi_j| \sum_{k=1}^{K} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \max_j |\varphi_j| \cdot (b-a) = \|\varphi\|_\infty (b-a) \quad \square$$

<u>Bem</u> $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

denn $\sup_x \underbrace{|f(x)+g(x)|}_{\leq |f(x)| + |g(x)|} \leq \sup_x |f(x)| + \sup_y |g(y)|$

$\square$

8.9 Def $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ heißt

Regelfunktion $:\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge (φ_n) von Treppfktnen, die auf $[a,b]$ glm. gegen f konv.

In dem Fall sei $\displaystyle\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx,$

außerdem $\displaystyle\int_a^a f = 0$, und $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

F1: $\exists$ lim? Ja.

F2: Hängt lim von der Wahl der Folge φ_n ab? Nein.