Nachtrag zur Regel von de l'Hospital

Regel $\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

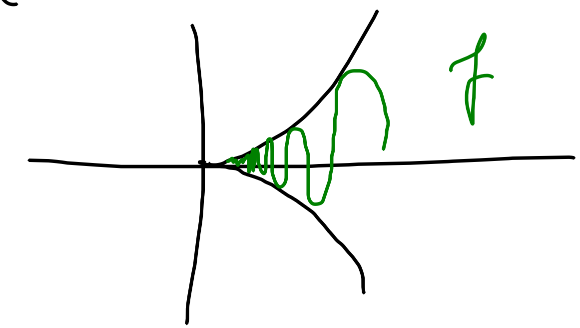
und sind gleich.

Frage: gilt auch $\Longleftarrow$?

Antwort: Nein.

Bsp $a=0$, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $(x>0)$

$g(x) = x$



$$\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\longrightarrow 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{div}}$$

$g'(x) = \cancel{x}\ 1$, $\quad \nexists \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Wieso sah es im Beweis so aus?

$$\frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{0}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Nimm $x \to a$, dann auch $\xi \to a$,
aber ungleichm. kommen nur bestimmte ξ vor.

Integration: Regelintegral, Regelfunktionen

Def $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion*

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge (φ_n) von Treppenfktnen, die auf $[a,b]$ glm. gegen f konv.

In dem Fall $$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

F1: $\exists$ lim? Ja

F2: Hängt lim von der Wahl der φ_n ab? Nein

Beweis Wenn $\varphi_n \to f$ glm., dann

$$\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| = \left| \int (\varphi_n - \varphi_m) \right| \leq \int |\varphi_n - \varphi_m|$$

$$\le \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \, (b-a)$$

$$\le \Big[\underbrace{\|\varphi_n - f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \forall n \ge n_\varepsilon} + \underbrace{\|f - \varphi_m\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \forall m \ge n_\varepsilon} \Big] (b-a) < \varepsilon \quad \forall n, m \ge n_\varepsilon$$

Da $\|\varphi_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$$\boxed{\begin{aligned} \|f+g\|_\infty = \sup_x |f(x) + g(x)| &\le \sup_x \big(|f(x)| + |g(x)| \big) \\ &\le \sup_x |f(x)| + \sup_y |g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow \left(\int \varphi_n \right)_n$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{C}$

$\longrightarrow$ konv., d.h. $\exists \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$.

Wenn auch $\psi_n \to f$ glm., dann

$$\left| \int \varphi_n - \int \psi_n \right| = \left| \int (\varphi_n - \psi_n) \right| \le \int |\varphi_n - \psi_n|$$

$$\le \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \, (b-a)$$

$$\le \Big[\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \psi_n\|_\infty \Big] (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

daher $\lim \int \varphi_n = \lim \int \psi_n$ $\square$

8.11 Prop f, g Regelfktnen $\Longrightarrow$ $f+g,\ fg,\ cf$ Regelfktnen

Bew Wenn $\varphi_n \to f$ glm., $\psi_n \to g$ glm., dann

$$\varphi_n + \psi_n \longrightarrow f+g \text{ glm.}$$

$$\varphi_n \psi_n \longrightarrow fg \text{ glm.}$$

denn $$\|\varphi_n + \psi_n - (f+g)\|_\infty \leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|\psi_n - g\|_\infty}_{\to 0} \longrightarrow 0.$$

$$\|\varphi_n\psi_n - fg\|_\infty \leq \underbrace{\|\varphi_n\psi_n - \varphi_n g\|_\infty}_{\leq \underbrace{\|\varphi_n\|_\infty}\ \underbrace{\|\psi_n - g\|_\infty}_{\to 0}} + \underbrace{\|\varphi_n g - fg\|_\infty}_{\leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|_\infty}_{\to 0} \|g\|_\infty} \longrightarrow 0.$$

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|f\|}_{\text{const}} \Big\} \text{ beschr.}$$

$\longrightarrow 0$ $\square$

$$\boxed{\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty}$$

8.12 Prop f, g Regelfktnen, $c \in \mathbb{C}$

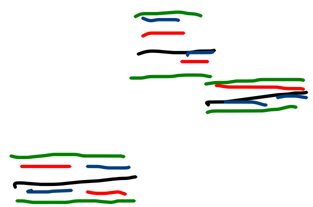
a) $$\left.\begin{aligned} \int (f+g) &= \int f + \int g \\ \int c f &= c \int f \end{aligned}\right\} \text{Linearität}$$

b) $f \leq g$ reellwertig $\Longrightarrow \int f \leq \int g$ (Monotonie)

c) $$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \|f\|_\infty (b-a)$$

Bew aus Prop. 8.8 durch $\lim\limits_{n \to \infty}$.

(Man muss $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$, $f \leq g$ so wählen, dass $\varphi_n \leq \psi_n$.) $\square$



$f = g$

8.13 Bem $[c,d] \subset [a,b] \Longrightarrow$

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\chi_{[c,d]}(x)\,dx$$

mit $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{für } x \notin M \end{cases}$ „charakteristische Fkt der Menge M"

$\Big($= „Indikatorfkt" $= 1_M(x)\Big)$

$\Big(f\,\chi_{[c,d]}$ ist Regelfkt$\Big)$

$\varphi_n \to f, \quad \varphi_n \chi_{[c,d]} \longrightarrow f\,\chi_{[c,d]}$

8.14 Satz Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f Regelfkt

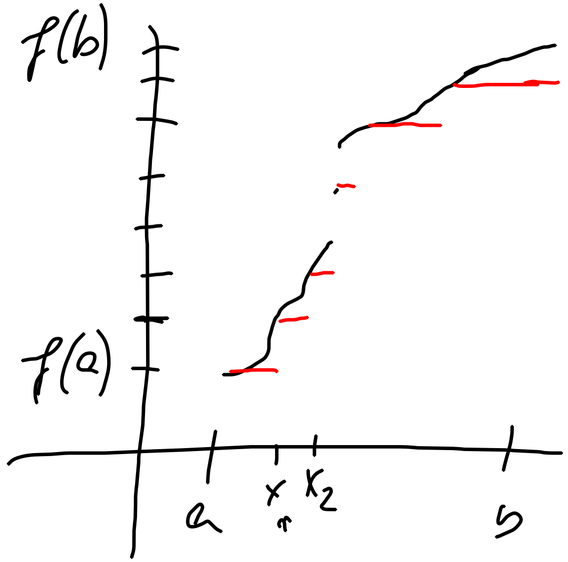
Bew OBdA f wachsend,

setze $h_n := \frac{1}{n}\big(f(b) - f(a)\big)$

$\varphi_k := f(a) + (k-1)\, h_n$, $K := n$

$x_k := \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) \leq \varphi_{k+1}\}$

$\|f - \varphi_n\|_\infty \leq h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$



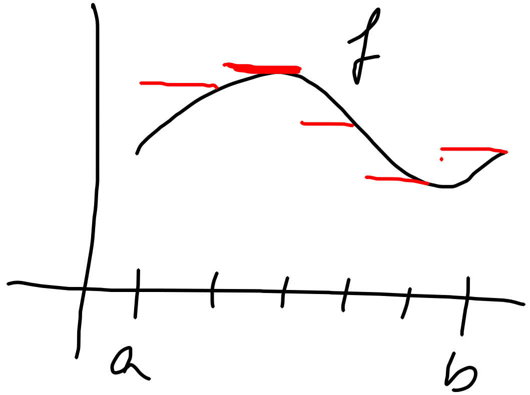
8.16 Satz Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig,

dann ist f Regelfkt.

Bew Wir unterteilen $[a,b]$ in $K \in \mathbb{N}$ gleich lange Teilintervalle, $x_k := a + k\frac{(b-a)}{K}$, $k = 0, \dots, K$

und setzen $\varphi_k := f(x_k)$

Dies def. $\varphi(x)$.



Wollen $\|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{1}{n}$

Satz 6.17 Sei $M \subset \mathbb{C}$ kompakt, $f : M \to \mathbb{C}$ st., dann ist f glm. st., d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M : \text{wenn } |x-y| < \delta,$$
$$\text{dann } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{n}$, $M := [a,b]$, $K \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{K} < \delta(\varepsilon)$.

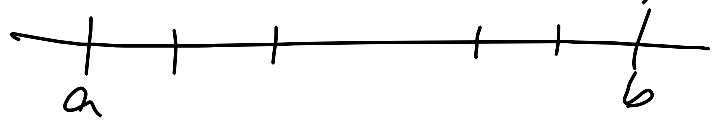
Dann $\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$: $|x-y| \le \frac{b-a}{K} < \delta$,

daher für $y = x_k$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$:

$$\Big| f(x) - \underbrace{f(x_k)}_{= \varphi_k = \varphi_n(x)} \Big| < \varepsilon = \frac{1}{n} \qquad \square$$

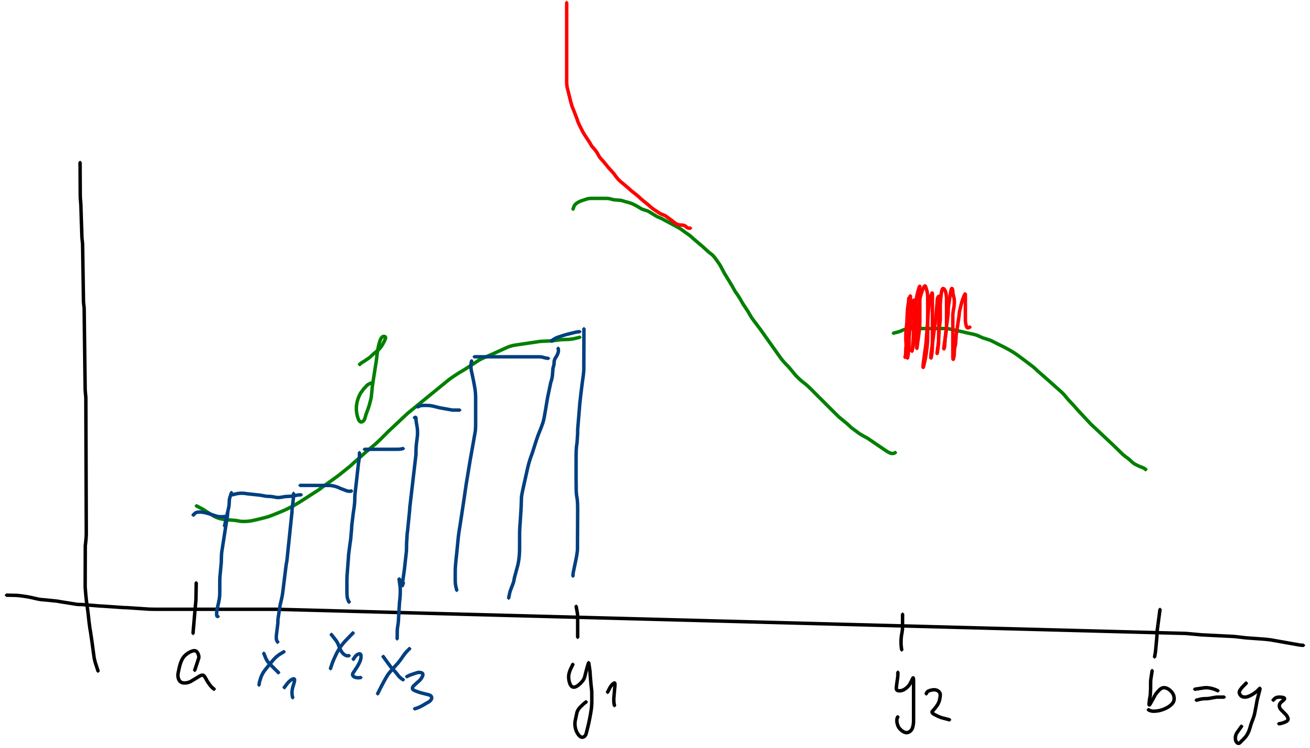
8.17 Def f stückweise stetig $:\Longleftrightarrow$

$\exists\, a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_N = b$: f st. auf (y_{i-1}, y_i) $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$



und $\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}$: $\exists \lim\limits_{\substack{x \to y_i \\ x > y_i}} f(x)$

und $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$: $\exists \lim\limits_{\substack{x \to y_i \\ x < y_i}} f(x)$



Bem f stückw. st., dann ~~ist~~ auch Regelfkt.

(Beachte $\{y_1 \ldots y_N\} \neq \{x_1, \ldots, x_k\}$).

8.19 Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ st., $F(x)=\int_a^x f \quad \forall x\in[a,b]$

Dann ist F st. diffbar, und

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b].$$

Bew Seien $h>0$, $x, x+h\in[a,b]$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{h}\int_a^b f(t)\underbrace{\left(\chi_{[a,x+h]}(t)-\chi_{[a,x]}(t)\right)}_{\chi_{[x,x+h]}(t)}dt - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right|$$

$$= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\, dt \right|$$

$$\le \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left| f(t) - f(x) \right| dt$$

$$\le \sup_{t \in [x, x+h]} \left| f(t) - f(x) \right| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

weil f st.

So ähnlich für $h < 0$.

$$\Longrightarrow \quad \exists\, F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

$\square$

8.22 Erster Hauptsatz

Sei $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ st. differbar, $f = F'$.

Dann
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x)\right]_a^b$$
$$=: F(x)\Big|_a^b .$$