Wdh: partielle Integration

$$\int_a^b u'v = -\int_a^b uv' + \left[uv\right]_a^b$$

Substitution

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_c^d f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

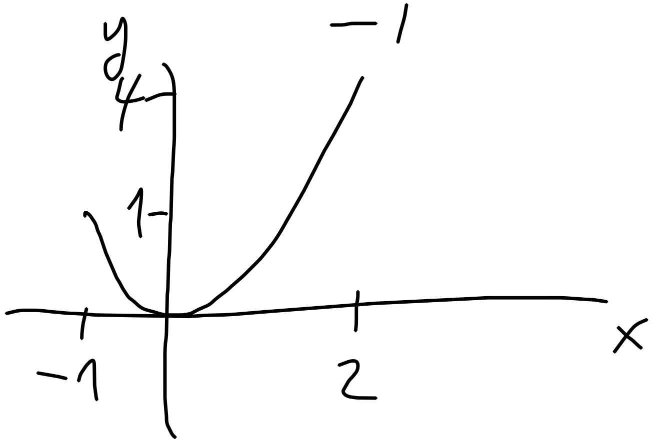
mit $a = g(c)$, $b = g(d)$

Subst. rückw = Subst. vorw. mit g^{-1}.

Beachte: Stimmt auch, wenn g nicht monoton ist.

Bsp

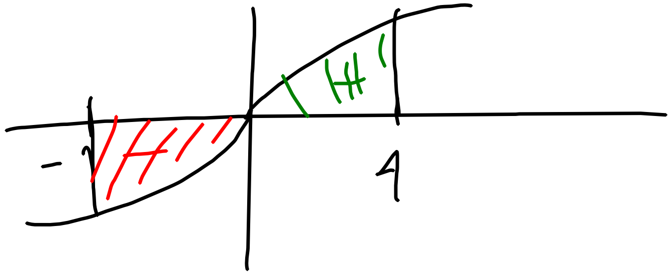
$$\int_{-1}^{2} x\, f(x^2)\,dx \underset{g(x)=x^2}{\overset{\text{Sub}}{=}} \frac{1}{2}\int_{1}^{4} f(y)\,dy$$



Tats. $\int_{-1}^{1} x\, f(x^2)\,dx = 0$

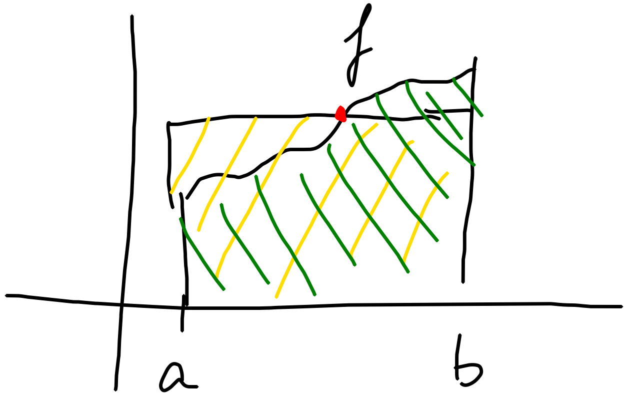
weil $x\, f(x^2)$ ungerade

h ungerade $:\Longleftrightarrow$ $h(-x) = -h(x)$



Def $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =:$ Mittelwert

von f auf $[a,b]$



8.33 Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWSI)

a) Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ st., dann $\exists\, \xi\in[a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

b) Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ st., $g:[a,b]\to(0,\infty)$ Regelfkt., dann $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Bew</u> a) $\Leftarrow$ b) für $g(x) = 1$.

b): ~~$\underbrace{\int_a^b \min f\,dx}_{} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \max f\,dx$~~

$$\min f \leq f(x) \leq \max f$$

$$\Rightarrow \min(f)\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq \max(f)\,g(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \boxed{\min(f)}\,g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \int_a^b \boxed{\max(f)}\,g(x)\,dx$$

Falls $\int_a^b g = 0$, folgt Beh. Sei $\int_a^b g > 0$.

$$\Longrightarrow \quad \min(f) \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}}_{=: q} \leq \max(f)$$

z.z.: $q = f(\xi)$

falls $\min f < q < \max f$: ZWS $\Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)$: $f(\xi) = q$.

$\min(f) = q \Longrightarrow$ Beh

$q = \max(f) \Longrightarrow$ Beh. $\square$

Bem Es gilt sogar $\xi \in (a,b)$.

Bem MWSI a) folgt aus MWS & HS:

$$HS \Rightarrow \exists F: F'=f,$$

$$\overset{MWS}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\frac{F(b)-F(a)}{b-a}}_{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} = F'(\xi) = f(\xi)$$

Für g st. folgt MWSI b) aus vMWS & HS:

Sei $F' = fg$, $G' = g \neq 0$, dann

$$\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi),$$

Vertauschen von Limes und Integral

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{J} a_{nj} = \sum_{j=1}^{J} \lim_{n\to\infty} a_{nj}$$

F: $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$?

8.35 Satz Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen, $f_n \to f$ glm.. Dann ist f auch eine Regelfunktion, und
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n .$$

Bew Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon$:

$$\| f - f_n \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$(\varphi_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ Treppenfkt, $\varphi_{nm} \xrightarrow{m \to \infty} f_n$ glm.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m(n) \in \mathbb{N}$: $\| f_n - \varphi_{nm(n)} \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Longrightarrow \| f - \varphi_{nm(n)} \|_\infty \leq \underbrace{\| f - f_n \|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\| f_n - \varphi_{nm(n)} \|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

für $n \geq n_\varepsilon$, d.h. $\varphi_{n,m(n)} \xrightarrow{n \to \infty} f$ glm.,

also ist f Regelfkt. und

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \int_a^b | f - f_n | \leq \| f - f_n \|_\infty (b-a) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \quad \square$$

Korollar $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfktnen

Wenn $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ glm. konv. auf $[a,b]$,

dann ist f Regelfkt und $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.

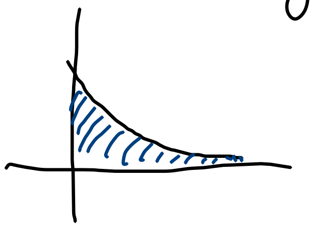
Insbes. für Potenzreihen:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-x_0)^n \, \cancel{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$$

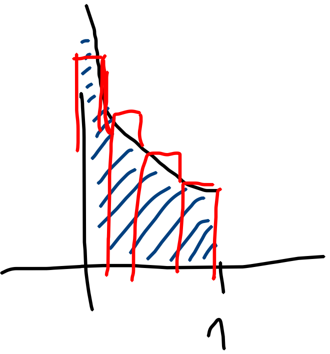
wenn $|a-x_0| < \rho$ und $|b-x_0| < \rho$.

Uneigentliche Integrale

zunächst nicht definiert



$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \quad , \quad \text{weil } b=\infty$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ weil $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ keine Regelfkt,

weil bei 0 unbeschr. und daher

kein glm Limes von Treppenfkt.

Tats. ist die Fl. unter dem Graphen endlich:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b}+1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}}}\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\downarrow 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\downarrow 0}\left(2-2\sqrt{a}\right)$$

$$= 2$$

$\lim\limits_{a\downarrow 0}$ oder $\lim\limits_{a\to 0+}$

8.39 Def Sei $f:[a,b)\to\mathbb{C}$, $-\infty<a<b\leq\infty$ auf allen $[a,c]$ mit $c\in[a,b)$ Regelfkt.

Das uneigentliche Integral von f über $[a,b)$ ist

$$\int_a^b f := \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f, \quad \text{falls } \exists \lim$$

"$\int_a^b f$ konv" $\Longleftrightarrow$ $\exists \lim \in \mathbb{C}$

"$\int_a^b f$ abs. konv." $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b |f|$ konv. $\Longleftrightarrow$ "$\int_a^b |f| < \infty$"

ebenso am linken Rand $-\infty \leq a < b < \infty$

$(a, b]$

An beiden Rändern (z. B. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$)

$$\int_a^b f := \underbrace{\int_a^c f}_{\substack{\uparrow \\ \text{uneig.} \\ \text{bei } a}} + \underbrace{\int_c^b f}_{\substack{\uparrow \\ \text{uneig.} \\ \text{bei } b}} = \lim_{d \to b} \lim_{c \to a} \int_c^d f .$$

Integralkriterium für Reihenkonvergenz

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ versus $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$

8.41 Satz Sei $f:[1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ fallend

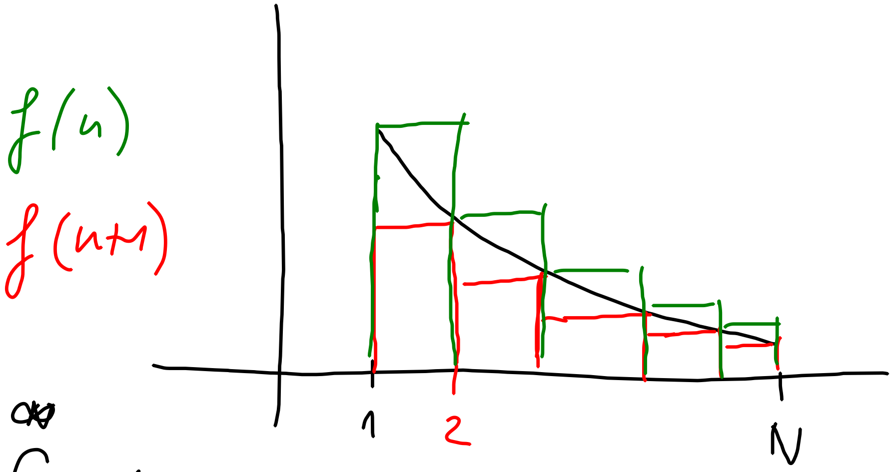
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konv. genau dann, wenn $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

Bew fallend $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [n, n+1]$

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\xrightarrow{\int_{n}^{n+1}} f(n+1) = \int_{n}^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_{n}^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n+1) \le \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n)$$



B.3. $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konv $\Longleftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f$ konv

„$\Rightarrow$": $\sum f(n)$ konv $\Longrightarrow$ $\int_1^{N+1} f \le \sum^{N} f(n) \le \sum^{\infty} f(n)$

$\Rightarrow \forall x>1:$ $\int_1^x f \le \sum^{\infty} f(n)$, also $\forall (x_k)$ mit $x_k \to \infty$ monoton

$\int_1^{x_k} f \le \sum^{\infty} f(n)$ beschr $\left(\int_1^{x_k} f\right)$ beschr, monoton also $\exists \lim_{x\to\infty} \int_1^x f = \int_1^{\infty} f$.

„$\Leftarrow$": $\int_1^\infty f$ konv $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} f(n) = f(1) + \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$

$$\le f(1) + \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konv. } \square$$

8.42 Bsp $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 1$.

Bew Für $\alpha \le 0$ ist $\frac{1}{n^\alpha}$ keine Nullfolge → div.

Für $\alpha > 0$ ist $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$ und fallend

Int. krit:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b & \alpha \ne 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

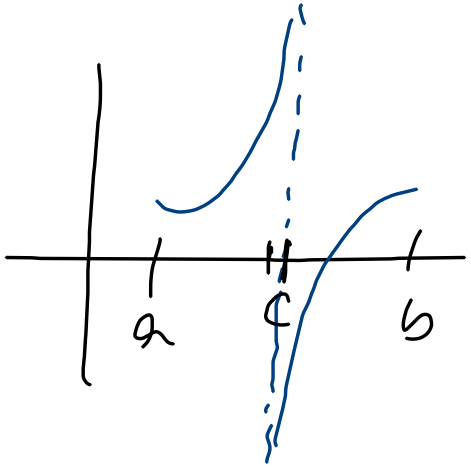
$\square$

8.4 Integration rationaler Fktnen

$$\int_a^b \frac{q(x)}{p(x)}\,dx = ?\,, \quad p, q \text{ Poly}, \quad p(x) \neq 0 \text{ in } [a,b]$$

Bsp

$$\int_a^b \frac{dx}{x+c} = \ln(x+c)\Big|_a^b$$



$$\int_a^b \frac{dx}{(x+c)^n} = \frac{(x+c)^{-n+1}}{-n+1}\Big|_a^b \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$RS = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

$A = 1$
$B = -1$