

11

(a) Richtig.

Beweis: Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$. $\exists q_2 > q_1$.

Wähle $h \in \mathbb{N}$ so, dass $\pi < 4 \leq \left(\frac{q_2 - q_1}{2}\right) \cdot 10^h$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{10^h} < \frac{q_2 - q_1}{2}$$

$$\Rightarrow q_1 < q_1 + \frac{\pi}{10^h} < \frac{q_2 + q_1}{2} + q_1 = \frac{q_2 + q_1}{2} < q_2$$

und $q_1 + \frac{\pi}{10^h}$ irrational, da π irrational

□

(b) Richtig.

Beweis: Da M_2 beschränkt $\exists C > 0$ so, dass $\forall m \in M_2: -C \leq m \leq C$.

Da $M_1 \subseteq M_2$ gilt: $\forall \tilde{m} \in M_1: -C \leq \tilde{m} \leq C$

Also ist M_1 und besitzt ein Supremum $\sup M_1$.

Da $M_1 \subseteq M_2$ und $\sup M_2$ insbesondere eine obere Schranke von M_2 ist, ist $\sup M_2$ auch obere Schranke von M_1 .

$$\text{Def } \sup \Rightarrow \sup M_1 \leq \sup M_2.$$

(c) Falsch.

Gegensp. $x_n = \frac{1}{n}$

Wissen $x_n \rightarrow 0$, aber für $\varepsilon = 0$ $\nexists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0$

$$|x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq 0, \text{ da } \frac{1}{n} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

d) Richtig.

Beweis:

$\Rightarrow$ klar per Def. ($<$ impliziert $\leq$)

$\Leftarrow$ Es gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |x_n - x| \leq \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest.

Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0: |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Damit folgt für alle $n \geq n_0$

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x .

e) Falsch.

Gegensp: Wähle $x_n = \frac{1}{n}$

Dann gilt wieder $x_n \rightarrow 0$, aber für $n_0 \in \mathbb{N}$ wähle

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0 + 1}. \text{ Dann folgt } |x_{n_0} - x| = \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n_0 + 1}$$

(f) Falsch:

Gegenbeispiel: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 1$.

Dann gilt $x_n > 0$ und $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 1$.

Aber $\frac{y_n}{x_n} = n$

konvergiert nicht.

(g) Falsch:

Gegenbsp: $x_n = -1$, $z_n = 1$, $y_n = (-1)^n$.

Dann gilt $x_n \rightarrow -1$, $z_n \rightarrow 1$ und $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aber $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(h) Falsch.

Gegenbsp: wähle $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$.

Dann gilt $\sup_{[0,1]} f = 1 = \sup_{[0,1]} g$ und $f+g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + (x-1) = 1$,

also $\sup_{[0,1]} (f+g) = 1 \neq 2 = \sup_{[0,1]} f + \sup_{[0,1]} g$.

(i) Falsch

Gegeben: $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $f_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

$f_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$.

Dann gilt $f_1 + f_2 = f$, f stetig, aber

f_1, f_2 beide nicht stetig bei $x_0 = \frac{1}{2}$.

(j) Richtig:

Beweis:

$f_1 = f - f_2 = f + (-1) f_2$ stetig.



A2

Seien N, M Mengen, $f: N \rightarrow M$ Abbildung.

(a) Beh. $\forall B \subseteq M$ gilt:

$$f^{-1}(B)^c = (f^{-1}(B^c))$$

Beweis: Sei $B \subseteq M$.

$$\begin{aligned} \cancel{\varnothing} \quad \cancel{\text{Sei}} \quad n \in f^{-1}(B)^c &\Leftrightarrow n \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow f(n) \notin B \\ &\Leftrightarrow f(n) \in B^c \\ &\Leftrightarrow n \in f^{-1}(B^c) \end{aligned}$$

□

(b) Beh. $\forall A, B \subseteq N: f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Beweis: Seien $A, B \subseteq N$. Falls $\cancel{A \cap B \neq \emptyset} \quad A \cap B = \emptyset$, so ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Sei also $A \cap B \neq \emptyset$, insbesondere $f(A \cap B) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} m \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists n \in A \cap B: f(n) = m \\ &\Rightarrow (\exists n \in A: f(n) = m) \wedge (\exists n \in B: f(n) = m) \\ &\Rightarrow (m \in f(A)) \wedge (m \in f(B)) \\ &\Rightarrow m \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

□

Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit:

$$N = \{x_1, x_2\}, \quad M = \{y_1\}$$

$$f: \{x_1, x_2\} \rightarrow \{y_1\}, \quad x \mapsto y_1$$

Dann gilt für $A := \{x_1\}$; $B := \{x_2\}$ dass

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset,$$

$$\text{d.h. } f(A) = \{y_1\} = f(B), \quad \text{also } f(A \cap B) = M \neq \emptyset.$$

A3

Beh(1): $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

Beweis:

Kleiner Gauß: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Z: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ mit vollständiger Induktion.

IA: $n=1$
 $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$

IS: Es gelte $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für $n \in \mathbb{N}$.

IS: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^n k^3 \stackrel{IV}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (4(n+1) + n^2) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

□

Beh(b): $\forall n \geq 2: \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$

Beweis: mit vollständiger Induktion

IA: $n=2:$

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

IV: Für $n \geq 2$ gelte $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$

IS: $n \rightarrow n+1$

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{n+1-1}{n+1}\right) = \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\stackrel{IV.}{=} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= \left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

□

Beh(c): $\forall a, b > 0 \quad \forall n \geq 2: (a+b)^n \leq 2^{n-1} (a^n + b^n)$

Beweis: mit vollständiger Induktion. $\text{O.} \quad b > a \quad (*)$

IA: $n=2$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2ab - b^2 - a^2$$

$$= 2(a^2 + b^2) - (b-a)^2$$

$$\leq 2(a^2 + b^2)$$

IV: Es gelte $(a+b)^n \leq 2^{n-1} (a^n + b^n)$ für $n \geq 2$

IS: $n \rightarrow n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n \stackrel{a, b > 0}{\leq} (a+b) \cdot 2^{n-1} (a^n + b^n)$$

IV:

$$= 2^{n-1} (a^{n+1} + b^{n+1}) + 2^{n-1} (ab^n + ba^n)$$

$$= 2^n (a^{n+1} + b^{n+1}) + 2^{n-1} (b-a)(a^n - b^n)$$

$$\stackrel{b > a}{(*)} \leq 2^n (a^{n+1} + b^{n+1})$$

□

A4

Beh (a): Die Fgk $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot n$ konvergiert nicht.

Beweis

Wähle TF $n_k := 2k-1$. Dann gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2}n_k\right) = \pm 1$.

Inbesondere $|a_{n_k}| = n$.

Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unbeschränkte TF besitzt, ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst unbeschränkt.

Also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht. □

Beh (b): $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n := \sqrt[4]{n^4 + 2n} - n$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. (Satz von Eudoxos.)

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |b_n - 0| &= \left| \sqrt[4]{n^4 + 2n} - n \right| = \left| \frac{\sqrt[4]{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt[4]{n^4 + 2n} + n^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sqrt[4]{n^4 + 2n} - n^2}{2n} \right| \\ &= \frac{1}{2n} \left| \frac{(n^4 + 2n) - n^4}{\sqrt[4]{n^4 + 2n} + n^2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 2n} + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

(c) Beh. Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{(n+2)^2(n-1)}{3n^2 + 16n + 100}$

konvergiert nicht.

Beweis:

Für $n \geq 2$ gilt $1 \leq \frac{n}{2} \iff \frac{n}{2} \leq n-1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(n+2)^2(n-1)}{3n^2 + 16n + 100} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2)^2 n}{3n^2 + 16n + 100} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n^3}{3n^2 + 16n + 100} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n^3}{3n^2 + 16n^2 + 100n^2} \\ &= \frac{n^3}{2 \cdot 119 n^2} \geq \frac{1}{300} n \end{aligned}$$

Da $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Also konvergiert $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.

Beh(alt): Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert gegen 0.

Beweis:

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Übung A15
(Blatt 4) $\Rightarrow$

$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert gegen 0.

□

AS

Beh. Falls jede C -Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, besitzt jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ genau einen ~~kleinsten~~ elementaren Kern.

Beweis.

Sei $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, d.h.

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ b_n &\geq b_{n+1} \\ a_n &\leq b_n \end{aligned}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $b_n - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Seien $m, n \geq n_0$. ☐ $m > n$.

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n \leq b_m - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine C -Folge

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow x$.

$\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x , da

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) \rightarrow x.$$

Aufgrund der Monotonie der Folge gilt: $a_n \leq x \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Also besitzt die Intervallschachtelung einen Kern.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.

Angen. es gäbe ~~zwei~~ x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2$ ($\exists x_1 < x_2$) und

$$x_1, x_2 \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b_n - a_n \geq x_2 - x_1 > 0$$

$$\nearrow b_n - a_n \rightarrow 0$$

□

Beh: Falls jede Intervallschachtelung einen elementaren Kern besitzt, so besitzt jede nicht-leere, beschränkte Menge ein Supremum.

Beweis:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer, beschränkt. Dann ex. $a_0 \in M$ und eine obere Schranke $b_0 \in \mathbb{R}$ von M , insb. $a_0 \leq b_0$.

Falls $a_0 = b_0$, so ist $a_0 = \sup M$.

Nun betrachte den Fall $a_0 < b_0$ und definiere iterativ:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & M \cap [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \neq \emptyset \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \cancel{a_n} b_n & M \cap [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \neq \emptyset \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Per Konstruktion $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \geq b_{n+1}$, $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Außerdem:

$$\cancel{b_{n+1} - a_{n+1}} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Damit ist $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, wobei

$\forall n \in \mathbb{N}$: b_n ist eine obere Schranke von M

und $M \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Nach Vor. $\exists! x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$
und insbesondere $a_n, b_n \rightarrow x$.

$$\exists x = \sup M.$$

(i) $\exists x$ ist eine Schranke

Sei $m \in M$. Da $\forall n \in \mathbb{N}$ b_n eine obere Schranke ist,
folgt $m \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow m \leq x$$

Also ist x eine obere Schranke von M .

(ii) $\exists \forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in M$ mit $x - \varepsilon < m_\varepsilon \leq x$.

(x ist kleinste obere Schranke)

Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen x
konvergiert, ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$x - a_n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x - \varepsilon < a_n$$

Da $x \leq b_{n_0}$ eine obere Schranke ist, gilt

$$\cancel{\{x\}} \cap M \cap [a_n, x] \cap M = [a_n, b_n] \cap M \neq \emptyset$$

$\Rightarrow \exists m_\varepsilon \in M$ mit

$$x - \varepsilon \leq a_n \leq m_\varepsilon \leq x.$$



A6

Seien X, Y nicht-leere Mengen, $f: X \rightarrow Y$

Beh (a): f ist genau dann injektiv, falls f eine Linksinverse besitzt.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei f injektiv und da $X \neq \emptyset$ wähle $x_0 \in X$ fest.

Definiere

$$g: Y \rightarrow X, y \mapsto \begin{cases} x_y & \text{falls } y \in f(X), f(x_y) = y \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g eine wohldefinierte Abbildung, denn

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : g(y) = x$$

Existenz: Aufgrund der Funktionsvorschrift.

Eindeutigkeit: Sei $y \in Y$ mit $x_1 = g(y) = x_2$ für $x_1, x_2 \in X$.

1.) Fall $y \notin f(X)$

$$x_1 = x_2 = g(y) = x_0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_0$$

2.) Fall $y \in f(X)$

Dann gilt nach der Funktionsvorschrift

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y = f(x_2) \\ f \text{ injektiv} &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Also ist g wohldefiniert und für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \\ f(x) &\in f(X) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ~~Angenommen~~ f besitzt ein Linksinverses,

Sei $x_1, x_2 \in X$. ~~Dann gilt~~ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Also gilt $x_1 = x_2$. Damit f injektiv.

Beh(b) f ist genau dann surjektiv, falls es ein Rechtsinverses besitzt.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei f surjektiv.

Für ein $y \in f(X)$, wähle $x_y \in f^{-1}(y)$ beliebig, aber fest.

Dann definiere

$$h: Y \rightarrow X, y \mapsto x_y.$$

Dann ist h eine wohldefinierte Abbildung, denn

$$\forall y \in Y \exists! x_y \in X: h(y) = x_y.$$

Existenz: f surjektiv, d.h. $\forall y \in Y$ ist $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

Eindeutigkeit: durch die feste Wahl von x_y .

Also ist h wohldefiniert und es gilt $\forall y \in Y$

$$f(h(y)) = y, \text{ da } h(y) \in f^{-1}(y).$$

$\Leftarrow$ f besitzt eine Rechtsinverse.

Sei $y \in Y$. Wähle $x = h(y) \in X$.

Dann gilt $f(x) = f(h(y)) = y$.

Also ist f surjektiv.

Im Allgemeinen sind Links- und Rechtsinverse nicht eindeutig.
(Nur falls f bijektiv ist, dann sind beide eindeutig bestimmt und gleich der Inversen f^{-1})

Gegenbsp: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$$f_1: X \rightarrow Y, \begin{cases} x_1 \mapsto y_1 \\ x_2 \mapsto y_1 \\ x_3 \mapsto y_2 \end{cases}$$

$$f_2: X \rightarrow Y, \begin{cases} x_1 \mapsto y_1 \\ x_2 \mapsto y_2 \\ x_3 \mapsto y_2 \end{cases}$$

$$g_1: Y \rightarrow X, \begin{cases} y_1 \mapsto x_1 \\ y_2 \mapsto x_2 \end{cases}$$

$$g_2: Y \rightarrow X, \begin{cases} y_1 \mapsto x_2 \\ y_2 \mapsto x_3 \end{cases}$$

Denn sind f_1, f_2 surjektiv und g_1, g_2 injektiv und
es gilt $\forall y \in Y: f_1(g_1(y)) = y$ für $i \in \{1, 2\}$

und $\forall y \in Y: f_j(g_j(y)) = y$ für $j \in \{1, 2\}$

→ f_1 hat Rechtsinverse g_1, g_2
 g_1 hat Linksinverse f_1, f_2

A7 Sei $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beh (i): Ist $f(x) \neq 0$ für ein $x \in (a,b)$, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$ und $f(y) \cdot f(x) > 0 \quad \forall y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Beweis: Sei $x \in (a,b)$ mit $f(x) \neq 0$.

Betrachte die Abbildung:

$$\tilde{f}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(x) \cdot f(y).$$

Da f stetig ist, ist $\tilde{f}$ stetig und es gilt

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2 > 0$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\tilde{f}$ in einer ε -Umgebung um x positiv ist.

Wähle zunächst $\varepsilon_0 := \frac{1}{2} \min(|b-x|, |a-x|)$ so, dass

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b) \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Angenommen für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \exists y_\varepsilon$ so, dass

$$y_\varepsilon \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(y_\varepsilon) \leq 0.$$

Wähle $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ für $n \geq n_0$, n_0 groß genug so, dass $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon_0$ (Satz von Eudoxos).

Dann erhalten wir (ab n_0) eine Folge $(y_n)_{n \geq n_0}$ mit

$$y_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subseteq (a,b) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(y_n) \leq 0.$$

Da $x - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x + \frac{1}{n}$ folgt mit Squeezelemma,

dass $y_n \rightarrow x$.

$\tilde{f}$ stetig
 $\Rightarrow$

$$\tilde{f}(y_n) \rightarrow \tilde{f}(x)$$

Da die Bildpunktfolge $\tilde{f}(y_n) \leq 0$ erfüllt und konvergiert, folgt

$$\tilde{f}(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > 0$$

Also muss ein $\varepsilon > 0$ wie in der Beh. existieren

■

(ii) Beh. Die Abbildungen $f_+, f_- : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $f_+ := \max(f, 0)$, $f_- := \max(-f, 0)$
sind stetig.

Beweis:

Bemerk.

$$\text{Bemerke } f = f_+ - f_- \Leftrightarrow f_- = f_+ - f$$

$$\text{oder } f_- = (-f)_+$$

also reicht es die Stetigkeit von f_+ nachzuweisen.

2 f_+ stetig.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_n \rightarrow x$.

$$1.) \text{ Fall } f(x) > 0 \quad (f_+(x) = f(x))$$

$$(i) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ so, dass } f(y) > 0 \quad \forall y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$$

Insbesondere gilt $f_+ = f$ auf $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ und es

ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$.

$$(|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon))$$

Also $f_+(x_n) = f(x_n) \quad \forall n \geq n_0$ und damit

$$f_+(x_n) = f(x_n) \rightarrow f(x) = f_+(x).$$

$$2.) \text{ Fall } f(x) \leq 0. \quad (f_+(x) = 0)$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_n \rightarrow x$.

Wir betrachten zunächst folgende Fälle

$$2.1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \geq 0$$

$$\text{Dann gilt wieder } f_+(x_n) = f(x_n) \rightarrow f(x) = 0 = f_+(x),$$

da $f(x_n) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ und somit nach Annahme

$$0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

$$2.2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) < 0$$

$$\text{Ins.} \quad f_+(x_n) = 0 \rightarrow 0 = f_+(x).$$

Für eine beliebige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fällt jede TF
~~entweder~~ von $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ entweder irgendwann in
 einer der beiden Fälle oder liegt immer wieder in
 beiden. In allen drei Fällen konvergiert ~~es~~ und gegen
 den selben Wert $f(x) = 0$. $(f_+(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$

für Fall
2.)

Ins. $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt mit genau einem Häufungspunkt

BlW 5 A21

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$$

Also f_+ stetig.

Beh (iii): $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis:

Bemerkung $|f| = f_+ + f_-$ und damit stetig



A8

Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ für teilerfremde } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Beh. f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und nicht stetig sonst.

Beweis

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ die Menge auf der f stetig ist.

$$\text{Z} \quad S = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

" $\subseteq$ " Sei $x \in \mathbb{Q}$. Ist $f(x) > 0$.

Wähle $x_n = x + \frac{1}{n}$. Dann gilt $x_n \rightarrow x$,

aber $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow f(x_n) = 0 \rightarrow 0 \neq f(x)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq S^c \Rightarrow S \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

" $\supseteq$ " zeige also f ist stetig in x für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow x$.

Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann gilt $f(x_n) = 0 \rightarrow 0 = f(x)$,

also muss die Aussage nur für Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ bewiesen werden.

(Für beliebige $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$ argumentiere wieder mit Aufteilung in TF die alle den gleichen Grenzwert haben, vgl. A7)

Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow x$.

Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, gilt insb. $x \neq 0$ und wir können $\mathbb{Q}$

annehmen, dass auch $x_n \neq 0$ (gilt für gegen $n \geq n_0$ mit geeignetem n_0).

Für teilerfremde p_n, q_n so, dass $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ gilt.
also $f(x_n) = \frac{1}{q_n}$.

Wir zeigen mit Hilfe der folgenden Hilfsbehauptung, dass $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Hilfsbehauptung $\forall x \in \mathbb{R} \forall m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$M_{x,m} := (x-1, x+1) \cap \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ teilerfremd}, q \leq m \right\}$$

endlich.

Wir zeigen die Aussage für ein festes x mit vollständiger Induktion über m .

IA: $m=1$

$$\Rightarrow q=1, \text{ d.h. } M_{x,1} = (x-1, x+1) \cap \mathbb{Z}$$

Also $M_{x,1}$ endlich, da in jedem beschränkten Intervall nur endlich viele ganze Zahlen enthalten sind.

IV: Es gelte $M_{x,m}$ endlich für $m \in \mathbb{N}$.

IS: $m \rightarrow m+1$

Bemerkung

$$M_{x,m+1} = M_{x,m} \cup \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ teilerfremd}, q = m+1 \right\} \cap (x-1, x+1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung reicht es zu zeigen, dass

$$A_m := (x-1, x+1) \cap \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ teilerfremd}, q = m+1 \right\} \text{ endlich ist.}$$

Da jedoch die Menge $\mathbb{Z} \cap ((m+1)(x-1), (m+1)(x+1))$ endlich

ist, ist insbesondere die Menge aller $p \in \mathbb{Z}$ in $((m+1)(x-1), (m+1)(x+1))$

endlich, die teilerfremd zu $q=m+1$ sind. Da dies genau den

Elementen von A_m entspricht, ist A_m endlich. (Noch Teilen durch $m+1$)

Also ist die Hilfsbehauptung bewiesen.

Zeige jetzt: $f(x_n) = \frac{1}{q_n}$ bildet eine Nullfolge

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $M_{x,m}$ endlich. Da $M_{x,m} \subseteq \mathbb{Q}$,

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, gilt $|x - m| > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$M_{x,m}$ endlich
 $\Rightarrow$

$$C_m := \min_{m \in M_{x,m}} |x - m| > 0$$

Wähle $\delta_m := \frac{C_m}{2}$, dann gilt $M_{x,m} \cap (x - \delta_m, x + \delta_m) = \emptyset$

Inbesondere gilt für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (x - \delta_m, x + \delta_m)$ für p, q teilerfremd,
 dass $q > m$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\frac{m_0}{m_0} \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (Satz von Archimedes) und $n_0 \in \mathbb{N}$

so, dass $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \delta_{m_0}$.

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|f(x_n)| = \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{m_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$$

□

Aufgabe 8: Sei p ein Polynom mit reellen Koeffizienten

Beh: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine NST von p , so ist $\bar{z}$ ebenfalls eine NST von p .

Beweis: Für geeignetes $m \in \mathbb{N}$, $a_h \in \mathbb{R}$ mit $a_m \neq 0$ gilt

$$p(z) = \sum_{h=0}^m a_h z^h. \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine NST von p . Da $0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = \overline{\sum_{h=0}^m a_h z^h} = \sum_{h=0}^m \overline{a_h z^h}$$

$$\stackrel{a_h \in \mathbb{R}}{=} \sum_{h=0}^m a_h \overline{z^h}$$

$$= p(\bar{z})$$

□

A10

(c) Da $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, ist die Folge beschränkt, d.h.

$\exists C > 0$ so, dass $(1 + \frac{1}{n})^n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

($C=e$ gültig, da die Folge monoton wächst)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} C = C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = C$$

Da $(2^{-n})(1 + \frac{1}{n})^n \geq 0$ ist die Reihe damit (absolut) konvergent.

Alternativ: Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{2^{-n} (1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n}) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

Also konvergiert die Reihe absolut

(b) Mit Partialbruchzerlegung:

Löse für $a, b, c \in \mathbb{R}$ fol.

$$\frac{1}{h(h+1)(h+2)} = \frac{a}{h} + \frac{b}{h+1} + \frac{c}{h+2}$$

Alternativ: Vorlesung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Da $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \geq 0$ ist die Reihe (absolut) konvergent

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 &= a(h+1)(h+2) + b h(h+2) + c h(h+1) \\ &= ah^2 + a3h + 2a + bh^2 + 2bh + ch^2 + hc \\ &= (a+b+c)h^2 + (3a+2b+c)h + 2a \end{aligned}$$

Löse also

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2} - b$$

$$\text{Denn } \frac{3}{2} + 2b - \frac{1}{2} - b = 0$$

$$\Rightarrow b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow a = c = \frac{1}{2}, \quad b = -1$$

haben also

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

Also gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{m+2} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^m \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^3 \frac{1}{n} \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} - \sum_{n=3}^m \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} \right) \rightarrow \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \text{ insb. konvergiert die Reihe.}$$

$$(c) \quad \sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \stackrel{n \geq 1}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{3n}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Also divergiert die Reihe (bestimmt gegen ∞)