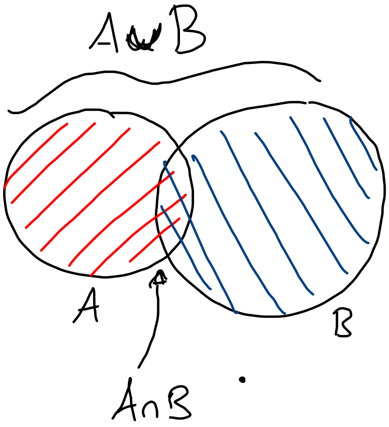
Wiederholung Mengenlehre

X Menge, $\quad A, B \subseteq X$ Teilmengen



$A \cap B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \text{ Element aus } B)\}$

$((\text{Ich heiße Markus}) \wedge (e^{i\pi} = -1))$

$A \cup B := \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A \setminus B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge \underbrace{(x \notin B)}_{\neg(x \in B)}\}$

$A^c := X \setminus A$ $\quad$ müssen X kennen

$\mathbb{R} \setminus \{2\} = \{2\}^c$ ✓

$\mathbb{Q} \setminus \{2\} = \{2\}^c$

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$A = \{x_1, x_2\}$

$B = \{x_1\}$

$A \setminus B := \{x_2\}$

$\{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \notin B)\} = A \cup B^c$

$= \{x_1, x_2, x_2, x_3\}$

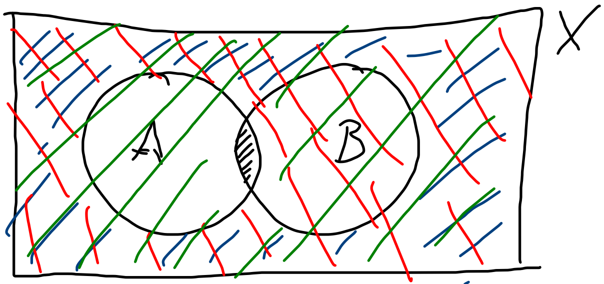
$= \{x_1, x_2, x_3\} = X$

Wann sind zwei Mengen gleich?

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$$
$$\iff ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$
$$\iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Bsp. 1.) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$(A \cap B)^c = \{x \in X : \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$
$$= \{x \in X : (\neg(x \in A)) \vee (\neg(x \in B))\}$$



$(A^c \cap B^c$

$\underline{\text{Beh.}}$ $(A, B \subseteq X)$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\underline{\text{Beweis:}}$

(„$\subseteq$") $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

(„$\supseteq$")

„$\subseteq$": „Wollen $A \subseteq B$ zeigen"

„$\supseteq$": „Wollen $B \subseteq A$ zeigen"

$\subset$, $\subseteq$ $\boxed{\subsetneq}$

$\blacksquare$

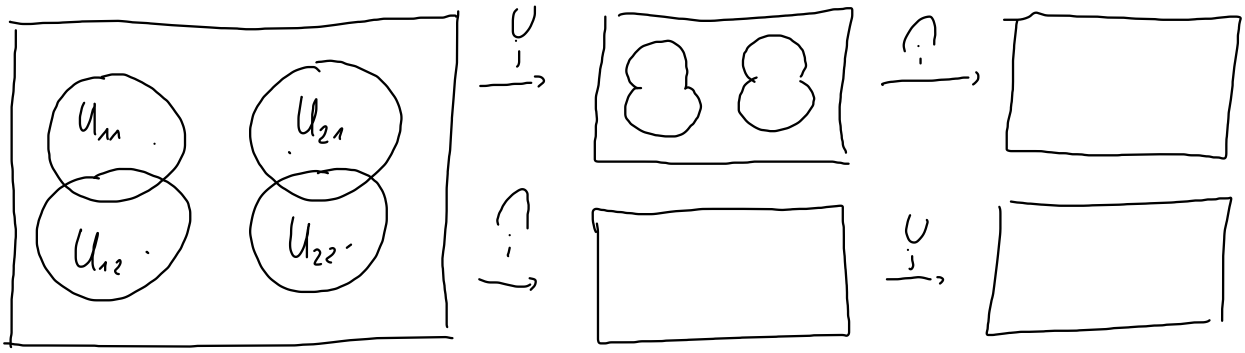
Bsp 2.) Seien I, J Indexmengen (z.B $\{1,2,3\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$)

für $i \in I$, $j \in J$, $U_{ij} \subseteq X$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij} \qquad \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij}$$

$\{(m,n) : m \in I, n \in J\}$

$I = J = \{1, 2\}$



$X = \{x_1, x_2\}$ $\quad U_{11} = U_{21} = \{x_1\}$, $\quad U_{12} = U_{22} = \{x_2\}$

$$\bigcap_{i \in \{1,2\}} \bigcup_{j \in \{1,2\}} U_{ij} = \bigcap_{i \in \{1,2\}} (U_{i1} \cup U_{i2}) = \{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_2\} = X$$

$$\bigcup_{j \in \{1,2\}} \bigcap_{i \in \{1,2\}} U_{ij} = \bigcup_{j \in \{1,2\}} (U_{1j} \cap U_{2j}) = \{x_1\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2\} = X$$

Allgemein:

„für alle“

$$x \in \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} U_{ij}\right) \iff \forall i \in I : x \in \bigcup_{j\in J} U_{ij}$$

$$\iff \forall i \in I : \exists j \in J : x \in U_{ij}$$

$$x \in \bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} U_{ij}\right) \iff \exists j \in J \;\; x \in \bigcap_{i\in I} U_{ij}$$

$$\iff \exists j \in J \;\; \forall i \in I : x \in U_{ij}$$

Bsp.: Für alle Menschen existiert ein Ort, an dem sie sich gerade befinden.

Offensichtlich wahr.

Es existiert ein Ort, an dem sich alle Menschen gerade befinden.

im Allgemeinen nicht richtig

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij} = \exists \underline{\underline{j \in J}} \quad \forall i \in I : x \in U_{ij}$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij} = \forall i \in I \quad \exists j(i) \in J : x \in U_{ij}$$

<u>Beh.</u> $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij}$

<u>Beweis:</u> $x \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij} \Rightarrow \exists j \in J : \forall i \in I : x \in U_{ij}$

$\Rightarrow \forall i \in I : \exists j = j(i) \in J : x \in U_{ij}$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij}$

$\blacksquare$

Gegenbeispiel

$I, J \in \{1,2\}$

$X = \{x_1, x_2\}$

$U_{11} = U_{22} = \{x_1\}$ $\qquad$ $U_{12} = U_{21} = \{x_2\}$

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I} U_{ij} = \bigcup_{j\in\{1,2\}} \left(U_{1j} \cap U_{2j} \right) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} U_{ij} = \bigcap_{i\in\{1,2\}} \left(U_{i1} \cup U_{i2} \right) = \{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1, x_2\} = X \neq \emptyset$$

(2.) Beweise strukturieren

Bsp: $(a-b)^2 \le (a+b)^2$??

$$(a-b)^2 \le (a+b)^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \le a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff -2ab \le 2ab$$
$$\iff 0 \le 4ab$$
$$\iff 0 \le a \cdot b$$
$$\iff a, b \text{ dasselbe VZ haben}$$

Beh. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Falls a und b dasselbe VZ besitzen, dann gilt $(a-b)^2 \le (a+b)^2$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot b \ge 0$

Dann $(a-b)^2 \le (a+b)^2$

Beweis:

$$-2ab \le 2ab$$
$$\iff 0 \le ab$$
$$\iff (a-b)^2 \le (b+a)^2$$
$$\iff a^2 - ab + b^2 \le a^2 + 3ab + b^2$$

Beweis:

Da a und b dasselbe VZ haben, gilt $a \cdot b \geq 0$

(Deshalb) $0 \leq ab \iff \ldots$

$\iff$

$\iff (a-b)^2 \leq (a+b)^2$

$\blacksquare$ $\square$ q.e.d.

Alternativer Beweis

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= 4ab \geq 0$$

nach Voraussetzung, da a und b dasselbe VZ haben

$\blacksquare$