<u>Übersicht:</u>

Körper , angeordneter Körper

↓ Gruppen

↓ Relationen

vollständigen Induktion

↓

Bsp , starken Induktion

Körper:

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$, $\mathbb{K}$ Menge, $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\cdot\ \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

i.) $(\mathbb{K}, +)$ abelsche Gruppe

ii.) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe

iii.) Distributivgesetz

Wir nennen $(G, \circ)$ Gruppe, falls für die Menge G und $\circ: G \times G \to G$

(i) $(g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$ (Assoziativität) $\forall\, g, h, j \in G$

(ii) $\exists\, e \in G: \quad e \circ g = g = g \circ e \quad \forall\, g \in G$

(e neutrales Element)

(iii) $\forall\, g \in G : \exists\, g^{-1} \in G : \quad g^{-1} \circ g = e = g \circ g^{-1}$

(g^{-1} Inverse)

Wir nennen G abelsch / kommutativ, falls $g \circ h = h \circ g \quad \forall\, h, g \in G$

Bsp. (i) $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppen

(ii) $(0,\infty)$ $\qquad$ $((0,\infty),\cdot)$ abelsche Gruppe

$a>0$: $\frac{1}{a}\in(0,\infty)$: $a\cdot\frac{1}{a}=1$ ✓

1 neutrales Element: $1\cdot a = a$

$a,b>0 \Rightarrow a\cdot b>0$

$[\quad]$ Grenzen enthalten

$(\quad)$ Grenzen nicht enthalten

<u>**Bem.:**</u> (ohne Beweis) e, g^{-1} <u>eindeutig</u> bestimmt

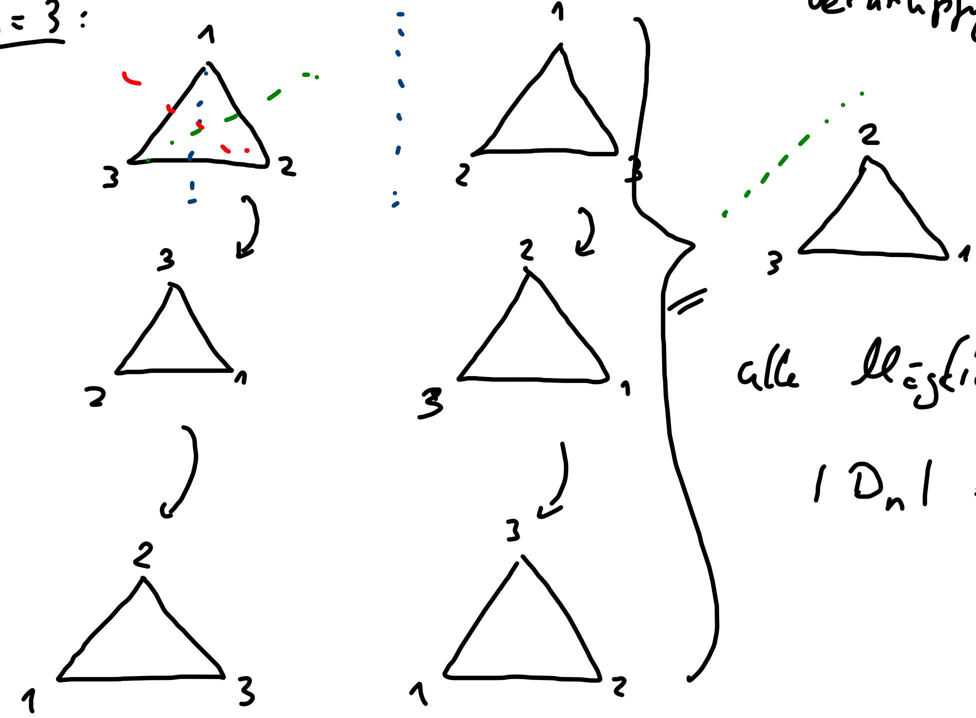
$\Rightarrow (g^{-1})^{-1} = g \qquad (g_1\circ g_2)^{-1} = g_2^{-1}\circ g_1^{-1} \neq g_1^{-1}\circ g_2^{-1}$

i. Allgemeinen

<u>Bsp</u> für nicht abelsche Gruppe

Diedergruppe $\hat{=}$ {Möglichkeiten die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks durchzunummerieren}

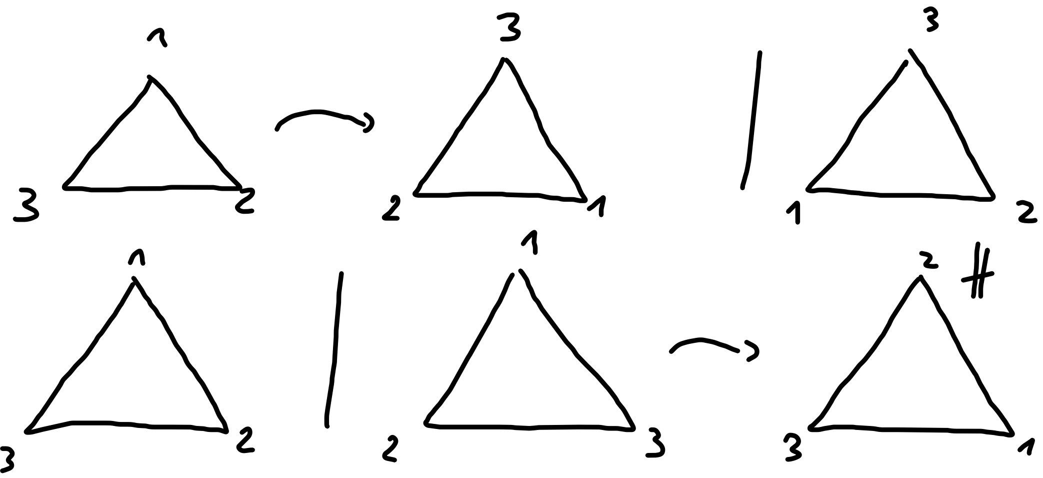
$\underline{n=3}$:



Verknüpfung: alle Kombinationen von Drehungen oder/und Spiegelungen

= alle Möglichkeiten

$|D_n| = 2n$



$\Rightarrow$ nicht abelsch

Angeordnete Körper

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ sagen $\mathbb{K}$ ist angeordnet, falls eine Relation $<$ existiert mit:

(O1) Es gilt immer genau eins: $a<b$, $b<a$, $a=b$

(O2) $a<b$, $b<c \Rightarrow a<c$

(O3) $a<b \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{K}: a+c < b+c)$

(O4) $(a<b) \wedge (c>0) \Rightarrow ac < bc$

Folgerungen: $(a>0 \Rightarrow -a<0)$, $1>0$ $(-1<0)$

~~Bew.~~

Beh.: $(a<b) \wedge (c<0) \Rightarrow ac > bc$ ($\mathbb{K}$ angeordnet)

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a<b$, $c<0$.
Dann gilt $-c>0$, also gilt nach (C4)

$$\begin{aligned}
a\cdot(-c) < b\cdot(-c) &\Longleftrightarrow a\cdot((-1)\cdot c) < b\cdot((-1)\cdot c) \\
&\Longleftrightarrow (a\cdot(-1))\cdot c < (b\cdot(-1))\cdot c \\
&\Longleftrightarrow ((-1)\cdot a)\cdot c < ((-1)\cdot b)\cdot c \\
&\Longleftrightarrow (-1)\cdot(a\cdot c) < (-1)\cdot(b\cdot c) \\
&\Longleftrightarrow -(a\cdot c) < -(b\cdot c) \\
&\overset{(C3)}{\Longleftrightarrow} (b\cdot c)-(a\cdot c) < (b\cdot c)-(b\cdot c) = 0 \\
&\overset{(C3)}{\Longleftrightarrow} (b\cdot c) < (a\cdot c)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Folgerung:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

$$|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b \qquad \text{(Übung)}$$

Allgemeinen Relation:

Eine Relation R auf einer Menge M (Mengen M_1 und M_2)
ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts, $R \subseteq M \times M$

$$a \sim b \qquad (R \subseteq M_1 \times M_2)$$

Für $(a,b) \in R$ schreiben wir auch aRb (oder benutzen Sonderzeichen. z.B. $<$)

Wir nennen eine Relation auf einer Menge:

(i) reflexiv: $(x,x) \in R \quad \forall x \in M$

(ii) symmetrisch: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(iii) transitiv: $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

(iv) trichotom: $\forall a,b \in M$ gilt immer <u>genau eines</u>:
$(a,b) \in R$, $(b,a) \in R$, $a=b$

<u>Bsp:</u> $M = \{a,b,c,d\}$

$$R_1 := \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$$

$$R_2 := \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$$

Vollständige Induktion:

Ziel: $A(n)$ wahr $\forall\ n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$

Verifikation: $A(n_0)$ wahr und ($A(n)$ wahr $\Rightarrow$ $A(n+1)$ wahr)

$A(n_0) \Rightarrow A(n_0+1) \Rightarrow A(n_0+2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow A(n_0+5\,000\,000)$

Aufbau Induktionsbeweis:

IA: $A(n_0)$ wahr

IV: sei $A(n)$ wahr

IS: $n \to n+1$

Bsp.:

1) Beh. (kleiner Gauß) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$n = 7$: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$1+7 = 8$ $\quad 8 = (n+1)$

$2+6 = 8$ $\quad (n+1) \cdot \frac{7}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$

$3+5 = 8$

$4 = \frac{1}{2} \cdot 8$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Induktionsschritt: $n \longmapsto n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{2}(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \blacksquare$$

2.) **Beh:** $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n} \quad \forall\ n\geq 2$

Erinnere: $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \qquad n \geq m$

und $\left(\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \quad \text{für} \quad m>n \right)$

Beweis: mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang: $n=2$

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$ (für $n\geq 2$)

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\prod_{k=2}^{n}\overset{\text{I.V}}{=}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1} \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Starke Induktion:

Manchmal reicht $A(n)$ wahr nicht, um $A(n+1)$ wahr zu folgern, sondern wir brauchen $A(k)$ wahr $\forall n_0 \leq k \leq n$.

Wenn wir als Induktionsvoraussetzung: $A(k)$ wahr $\forall k \leq n$

Das nennen wir starke Induktion:

$$A(n_0) \quad A(n_0+1) \quad A(n_0+2) \quad \cdots \quad A(n-1) \quad A(n) \quad A(n+1)$$

Starke Induktion ist keine Einschränkung!

Bsp.:

Wir nennen eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ prim / Primzahl, falls $p \geq 2$ und p wird nur durch 1 und p geteilt.

Beh.: Für alle $n \geq 2$ gilt, dass sich n als Produkt endlich vieler Primzahlen schreiben lässt.

Beweis: mit starker Induktion

Induktionsanfang: $n = 2$

2 Prim ✓

Induktionsvoraussetzung: $\forall\ 2 \le k \le n$ lasse sich k als Produkt endlich vieler Primzahlen schreiben.

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

1.) Fall: $n+1$ Prim ✓

2.) Fall: Angenommen $n+1$ nicht prim. Es existiert $q \in \{2, \dots, n\}$ und $r \in \mathbb{N}$: $n+1 = r \cdot q$

Gleichung nicht erfüllt für $r = 1$ oder $r > n$.

Also $r \in \{2, \dots, n\}$.

Also gilt nach IV r und q sich als Produkt endlich vieler Primzahlen schreiben lassen.

Also lässt sich $n+1 = r \cdot q$ als Produkt endlich vieler Primzahlen schreiben

$\blacksquare$