1.) Supremum / Infimum

Wdh: Alle Teilmengen in $\mathbb{R}$, alle beschränkten haben Sup / Inf (Supremumsaxiom)

Erinnere: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (mit $C \in \mathbb{R}$), falls $x \leq C \quad \forall x \in M$.

Supremum: kleinste obere Schranke

Formal: Wir nennen $s \in \mathbb{R}$ das Supremum von M, falls

(i) s ist obere Schranke, $s \geq x \quad \forall x \in M$

(ii) $\forall$ oberen Schranken $C \in \mathbb{R}$ von M, gilt $s \leq C$

$\Leftrightarrow$ (ii') $\forall C < s \;\exists x \in M: \quad C \leq x \leq s$

Schreiben wir $s = \sup M$. Analog def $\inf M$ als größte, untere Schranke

Bsp: Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ und wir betrachten

$$(a,b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$$[a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \}$$

$$[a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$$

Sehen sofort b obere Schranke und a untere Schranke, von beiden Mengen.

Z $\quad b = \sup \begin{matrix} (a,b) \\ [a,b] \end{matrix} \qquad a = \inf \begin{matrix} (a,b) \\ [a,b] \end{matrix}$

Beweis: (i) per Defn erfüllt ✓

Für $[a,b]$: Wollen (ii') überprüfen: Sei C obere Schranke von $[a,b]$.

$$b \in [a,b] \Rightarrow b \le C$$

Für (a,b): Für (ii): $(\forall\, C \ge x$ sodass $x < b) \Rightarrow C \ge b$ (mit Widerspruch)

Stattdessen: (ii'): Sei $C < b$, OE $a < C < b$

(Falls (ii') $\forall\ a < C < b$, dann gilt es auch für $C \le a$)

oBdA

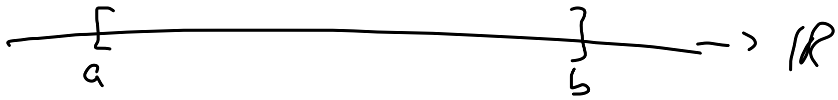
Wähle: $\tilde{c} := \frac{c+b}{2}$

Dann gilt: $a < c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} < \frac{c+b}{2} = \tilde{c} = \frac{c+b}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b}{2}$

$< b$

$\Rightarrow \tilde{c} \in (a,b)$, $c < \tilde{c} < b$

$\blacksquare$



$[a,b]$, (a,b)

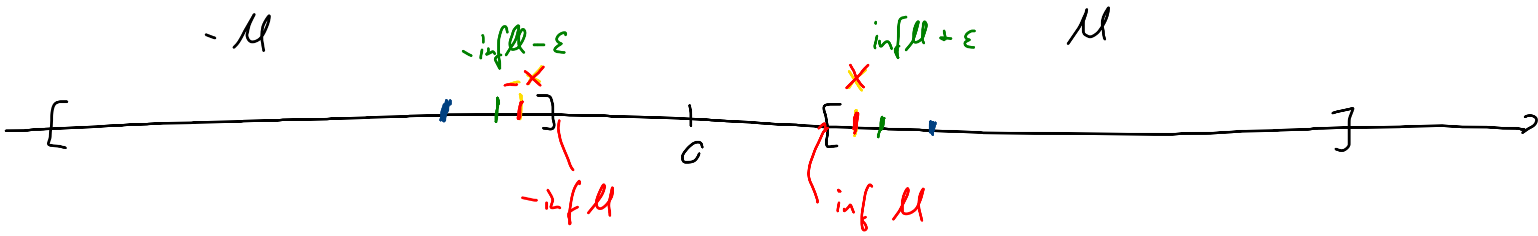
$\sup [a,b] \in [a,b]$ Maximum $\max [a,b] = \sup [a,b] = b$

$\inf [a,b] \in [a,b]$ Minimum $\min [a,b] = a$

Bsp. (Vgl. Vorlesung) $\sup(-M) = -\inf M$ ← nur das hier M beschränkt

$(\inf(-M) = -\sup M)$

$-M := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$



Beweis: z.z. $-\inf M$ ist obere Schranke

Sei $x \in (-M)$. Per Def. $-x \in M$. $-x \geq \inf M$. $\Rightarrow$ $x \leq -\inf M$.

$(\Rightarrow \sup(-M) \leq -\inf M))$

z.z. $-\inf M$ kleinste obere Schranke (mit (ii'))

Sei $\varepsilon > 0$. $\underbrace{-\inf M - \varepsilon}_{C} < -\inf M$ $\Leftrightarrow$ $\inf M < \inf M + \varepsilon$

Kandidat

$\Rightarrow \exists\, x \in M$ so, dass $\inf M \leq x \leq \inf M + \varepsilon$.

$\Rightarrow$ für $-x \in (-M)$ gilt $-\inf M - \varepsilon \leq -x \leq -\inf M \leq \sup(-M)$ ▨

Bemerkung: Eigentlich haben wir folgendes gezeigt:

$$-\inf M - \varepsilon \leq \sup(-M) \leq -\inf M \quad \forall \varepsilon > 0$$

Konnten folgern: $-\inf M = \sup(-M)$

Allgemeiner für $a,b \in \mathbb{R}$: $(\forall \varepsilon > 0: \; a - \varepsilon \leq b \leq a + \varepsilon) \Rightarrow a = b \quad (*)$

Übung: $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right)$

Frage: M beschränkt? Falls ja Was ist das Sup / Inf (mit oder ohne Begründung) (2min)

$n = 1$: $\left(1, \frac{2\cdot 1+1}{1}\right) = (1, 3)$

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) \overset{n=1}{\subseteq} (1,3) \qquad \text{beschränkt.}$$

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n} < \frac{2n+1}{n}}_{x \in M} < 3$$

Was ist Sup / Inf ?

$\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \geq 1 \qquad 1$ wird erreicht für $n = 1$

$\left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) \qquad \frac{2n+1}{n} > 1$

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1, \frac{2n+1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1, 2 + \frac{1}{n}\right)$$

$2 \in M.$

$\sup M \geq 2$

$\forall C > 2 : \exists n \in \mathbb{N} : 2 + \frac{1}{n} < C$

$2 + \frac{1}{m} < 2 + \frac{1}{n} \quad \forall m > n$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad = (1, 2]$

$n = 1 \qquad (1, 3)$

$n = 2 \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right)$

$n = 3 \qquad \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$(1, 3) \cap \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$

$\left(1, \frac{5}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(1, \frac{7}{3}\right)$

Folgen:

Eine Folge ist eine Zuordnung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. jeder natürlichen Zahl n, wird eine reelle Zahl x_n zugeordnet.

Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge und x_n Folgenglied.

hier keine Reihenfolge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{!!}{\neq} \{x_1, \ldots, x_{10000}, \ldots\}$$

großer Unterschied! Vgl (**)

Reihenfolge!

$x_n = n$ $\qquad x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3 \; \ldots$

$\qquad x_1 = 10000, \; x_2 = ?, \ldots, \; x_{10000} = 1$

nicht die gleiche Folge!

Wir nennen zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich, falls $x_n = y_n \;\forall\, n\in\mathbb{N}$

$$x_1 = 1 \neq 10\,000 = y_1$$

Treffender: (x_n), $\{x_n \mid x_n$ ein Folgenglied von (x_n) ist$\}$ (**)

Besser!

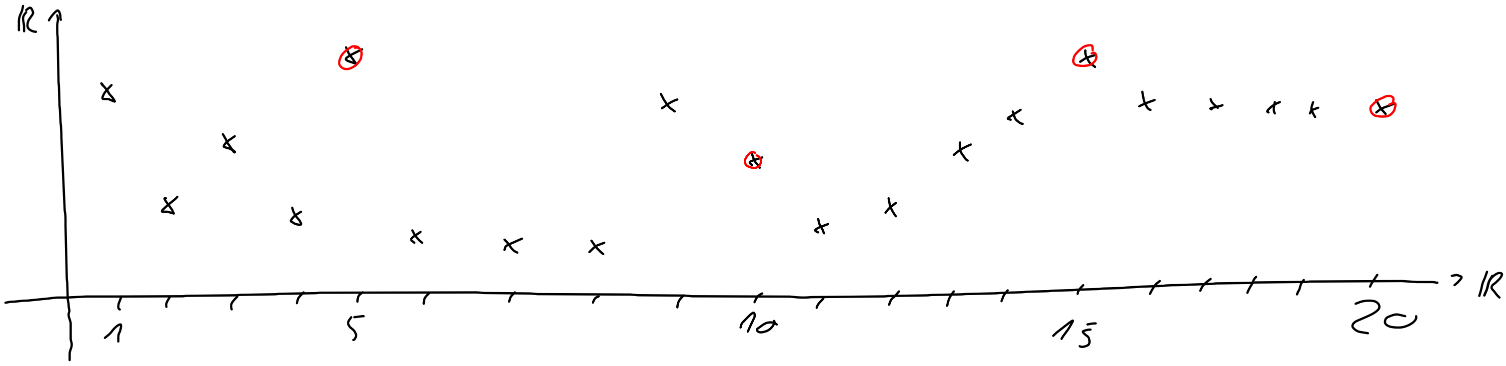
Bsp: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge

$x_n = n$ $\qquad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \dots$

$x_n = \frac{1}{\pi^n}$ $\qquad x_1 = \frac{1}{\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{\pi^2}, \quad x_3 = \frac{1}{\pi^3}, \dots$

Für eine gegebene Folge (x_n) können wir auch nur bestimmte Folgenglieder (aufsteigende und unendlich viele), z.B. nur gerade $n = 2k$, ungerade $n = 2k-1$, jedes fünfte Folgenglied, und bezeichnen diese als Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

Bsp: Wollen nur jedes fünfte Folgenglied: $n_k = 5k$



Folgenkonvergenz

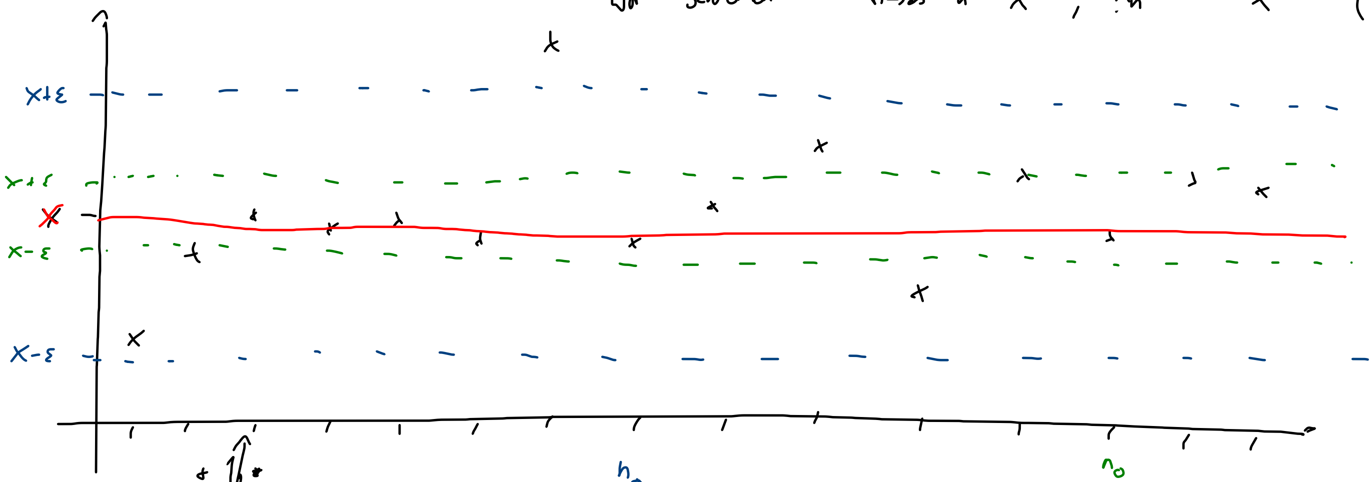
Definition: Wir sagen eine Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, falls

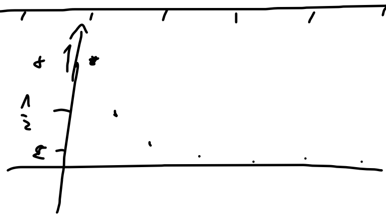
(i) Für alle $\varepsilon > 0$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$

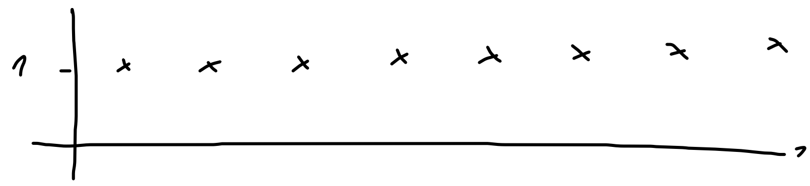
(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle, bis auf endlich viele Folgenglieder.

Wir schreiben $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ $(x_n \to x)$





Bsp: 1.) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $x_n = 1$



Beh. $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, $n_0 = 1$. Dann gilt $\forall\, n \geq n_0$

$$|x_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

2.) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{2n^2-2n}{2n^2-n}$

Intuition: $x_n \xrightarrow[\infty]{n} 1$

$$\left| \frac{2n^2-2n}{2n^2-n} - 1 \right| = \left| \frac{2n^2-2n-(2n^2-n)}{2n^2-n} \right|$$

$\forall n\in\mathbb{N}: 2n-1 \geq n$

$$= \left| \frac{-n}{2n^2-n} \right| = \frac{n}{2n^2-n} = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n}$$

Beh. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, n_0 \in\mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < n_0 \iff \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Dann gilt $\forall\, n \geq n_0$:

$$|x_n - 1| = \ldots = \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$\blacksquare$