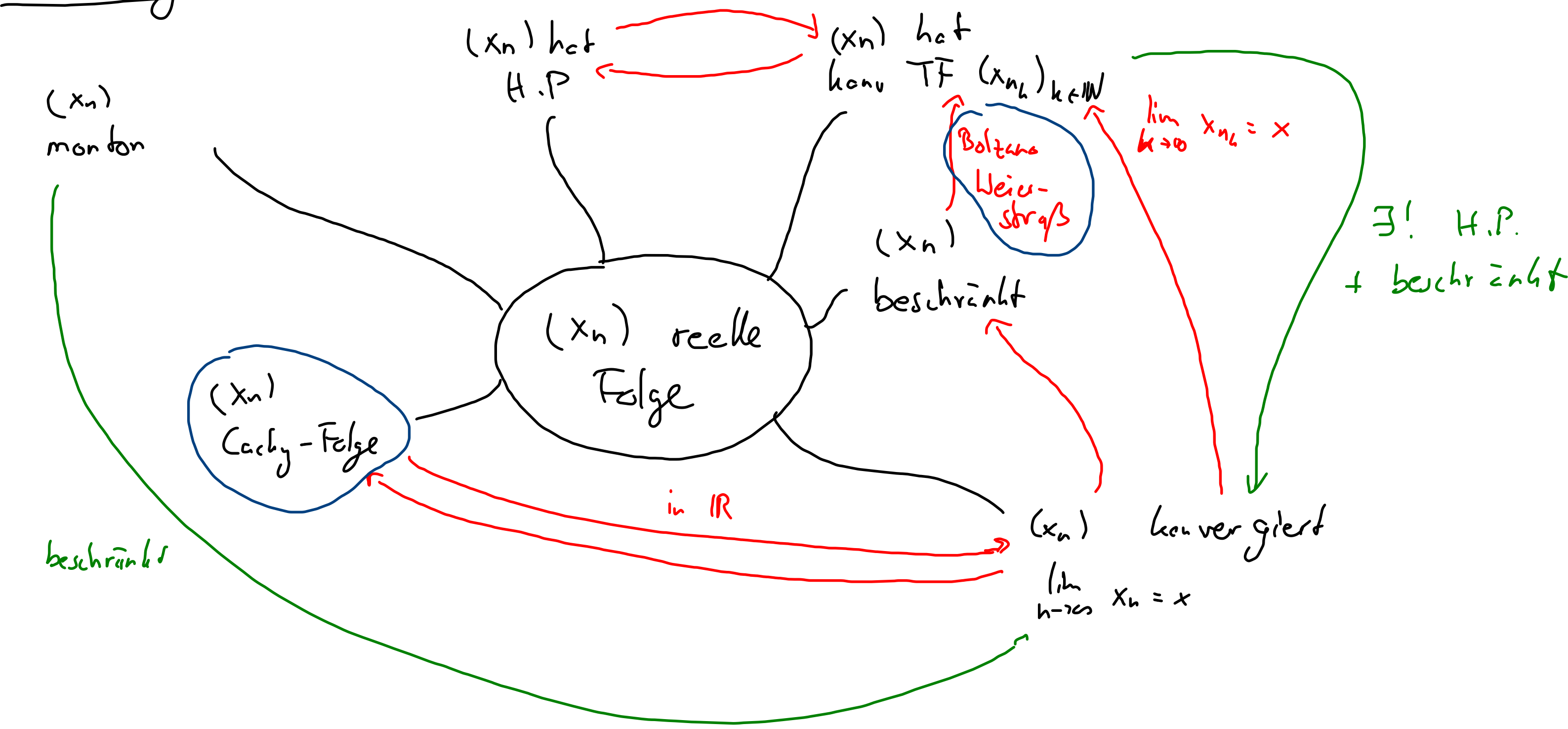
Übersicht:

1.) Folgen

2.) Abbildungen / Fkt.

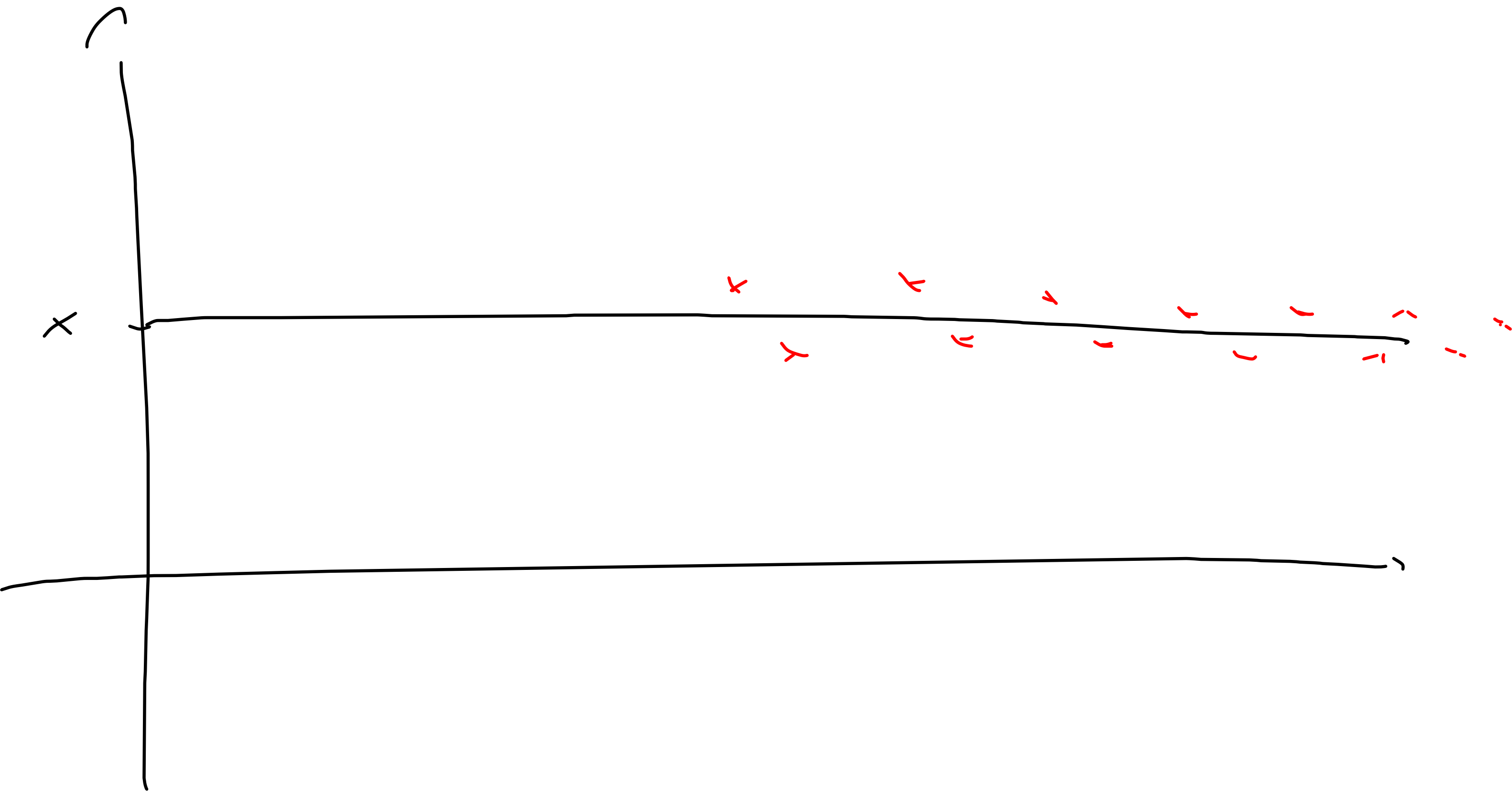
3.) Mächtigkeit von Mengen

1.) Folgen:



⟶ gilt immer

⟶ gilt unter zusätzlichen Bedingungen


x

Bolzano - Weierstraß:

Jede beschränkte Folge hat konv. TF.

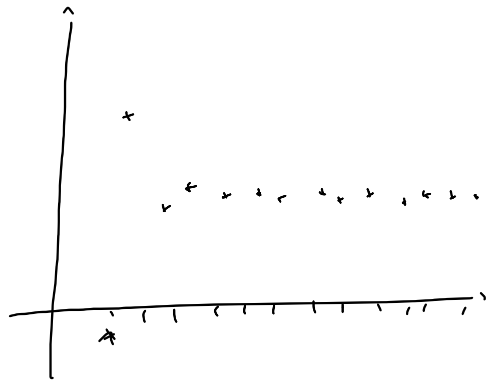
Beweisidee: Intervallschachtelung

$(x_n) \subseteq [a, \; b]$

hier oder hier immer noch unendlich viele Folgenglieder.

Nebenbem.: Jede Folge hat monotone TF

Monotoniekriterium $\Rightarrow$ B - W.



Anwendung: Cauchy - Kriterium

(x_n) ist Cauchy - Folge $\iff$ (x_n) konvergiert (in $\mathbb{R}$)

Erinnerung: C - Folge.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, m, n \geq n_0 : \; |x_n - x_m| < \varepsilon$

Mehrere Begriffe für Vollständigkeit (Archimedisches Axiom gegeben)

(i) Supremumsaxiom: jede (nach oben) beschränkte Menge hat Sup.

(ii) Intervallschachtelungsprinzip: Jede Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}$ hat Sammelpunkt $\boxed{x = \bigcap [a_n, b_n]}$

(iii) Cauchy-Kriterium: Jede C-Folge konvergiert.

Alle drei sind äquivalent: Die reellen Zahlen haben keine Lücken.

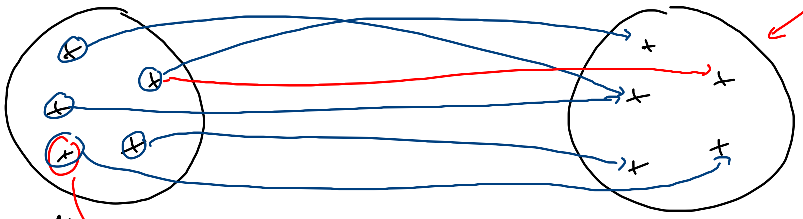
$\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ durch Auffüllen der Lücken

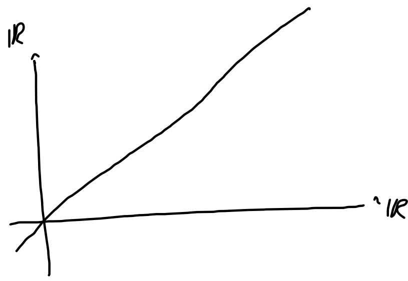
Wie groß sind die reellen Zahlen im Vergleich zu $\mathbb{Q}$?

2.) Abbildungen / Fkt

Schule: $f(x) = x, \; x^2, \; \exp(x)$

Eine Abbildung f ist Zuordnung von Menge M_1 in eine Menge M_2, so dass jedem Element $x \in M_1$ genau ein Element $y \in M_2$ zugeordnet wird.





Formal: Eine Abbildung f ist eine Teilmenge $A_f \subseteq M_1 \times M_2$:

(i) $\boxed{\forall x \in M_1 \; \exists \; y \in M_2 : (x,y) \in A_f}$ (linkstotal)

(ii) $\boxed{\text{Falls } y_1, y_2 \in M_2 \text{ mit } (x,y_1),(x,y_2) \in A_f : \Rightarrow y_1 = y_2}$ (rechtseindeutig)

Wir schreiben: $f: M_1 \to M_2, \; x \longmapsto y$ bzw. $f(x) = y$.

Wir nennen eine Abbildung $f: M \to N, (x \mapsto y)$,

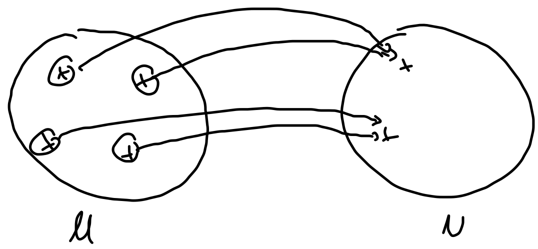
(i) surjektiv: falls $N = f(M)$

$\iff \boxed{\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y}$

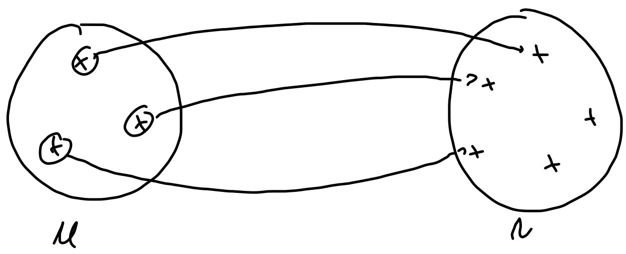
„alle Punkte in N werden mind. einmal getroffen"

(ii) injektiv: $\boxed{\text{Falls gilt: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$

„alle Punkte in N werden höchstens einmal getroffen"



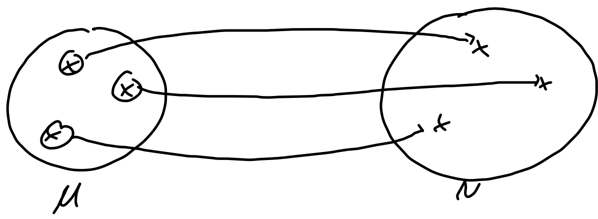
surjektiv



injektiv

Wir nennen f bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

„Jedes Element wird genau einmal getroffen"



$f: M \to N$ bijektiv $\iff$ $\exists\, g: N \to M$: $f(x) = y \iff g(y) = x$

$$f(g(y)) = y$$

$$g(f(x)) = x$$

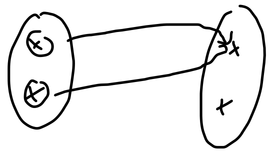
Wir schreib $g = f^{-1}$ (Umkehrabbildung)

<u>Vorsicht:</u> Unterschied zwischen Umkehrabbildung f^{-1} und dem Urbild f^{-1}

nur für bijektive Abbildungen — immer

Erinnere: $f: M \to N$, $B \subseteq N$ $\qquad f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\} \subseteq M$

<u>Bsp:</u> $f: \{x_1, x_2\} \to \{z_1, z_2\}$, $x \mapsto z_1$



f weder injektiv, noch surjektiv.

Urbild: $f^{-1}(z_1) = f^{-1}(\{z_1\}) = \{x_1, x_2\}$

$f^{-1}(z_2) = f^{-1}(\{z_2\}) = \emptyset$

Übung: (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$

(c) $f_3 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

(d) $f_4 : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$

Welche Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

(a) $y=1$ $\quad f(-1) = 1 = y = f(1) \Rightarrow$ nicht injektiv

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 0 \qquad \nexists x : f(x) = -1 \rightarrow$ nicht surjektiv.

(b) z.z. f_2 surjektiv:

Sei $y \geq 0$. $\quad x := \sqrt{y} \Rightarrow f(x) = \sqrt{y}^2 = y$ ✓

$x := -\sqrt{y}$

(c) z.z. f_3 injektiv.

$x_1, x_2 \in [0,\infty) : f_3(x_1) = f_3(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$

$\overset{x_1,x_2 \geq 0}{\Rightarrow} x_1 = x_2$ ✓

(d) bijektiv!

$f_4^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$x \mapsto \sqrt{x}$

Mächtigkeit von Mengen:

Erinn. $|M|$ = # Elemente (falls M endlich)

$|M| = ?$ für M unendlich groß

$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$|M_1| = |M_2| :\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $f: M_1 \to M_2$

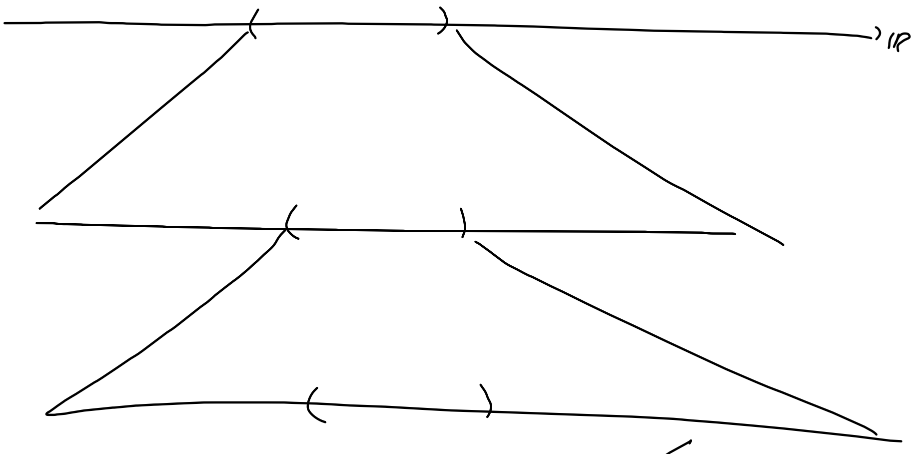
M_1 abzählbar $\Leftrightarrow \exists f$ Bijektion: $f: \mathbb{N} \to M_1$

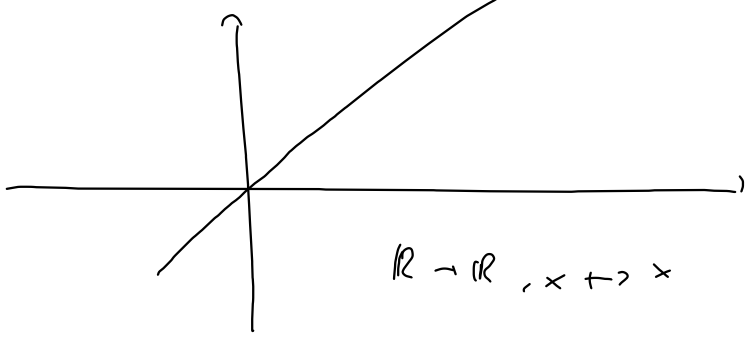
(können M_1 durchnummerieren)

$\mathbb{Q}$ abzählbar, aber $\mathbb{R}$ nicht abzählbar / überabzählbar

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationale Zahlen überabzählbar

Übungen: $\exists$ Bijektion $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$





$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x$