Übersicht:

1.) Stetigkeit von Funktionen

↳ Rechenregeln

↳ Eigenschaften

2.) Polynomdivision

1.1 Stetige Funktionen

Im folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wir sagen $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls $\forall$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass

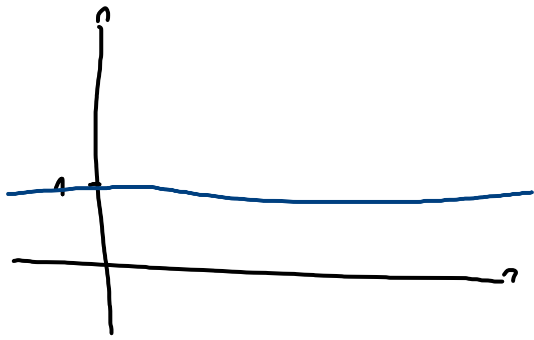
$$f(x_n) \to f(x_0)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right)$$

alle Folgen

Wir sagen f ist stetig (auf D), falls f stetig in x_0 ist $\forall x_0 \in D$.

<u>Bsp.</u> $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1$



<u>Beh.</u>: f_1 stetig

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \to x_0$.

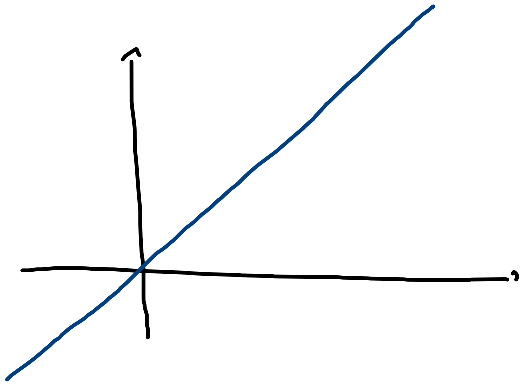
Dann gilt $$f(x_n) = 1 \to 1 = f(x_0).$$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \longmapsto x$

<u>Beh:</u> f_2 stetig

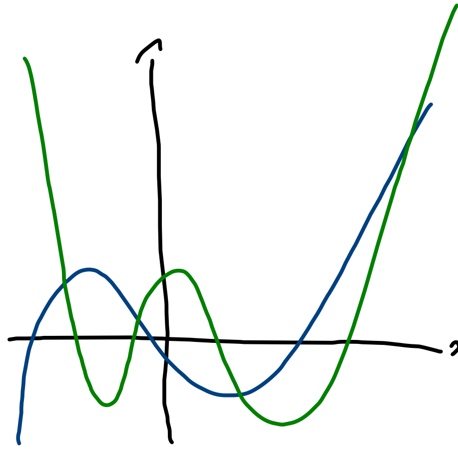
$x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$$



Polynom: $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \longmapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$

$$= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$



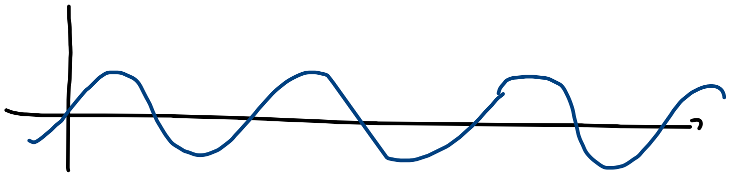
<u>Beh:</u> p stetig

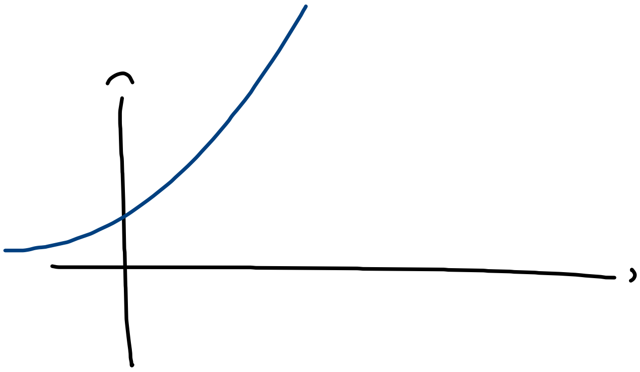
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt

$$p(x_n) = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{a_k x_n^k}_{\to a_k x_0^k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{m} a_k x_0^k = p(x_0)$$

$$(k=0 : \quad a_0 \to a_0)$$

mehr Beispiele: $\sin(x)$, $\exp(x)$

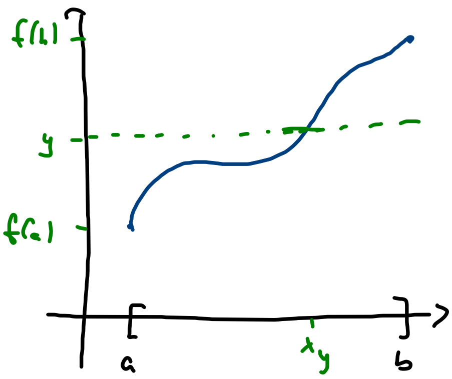


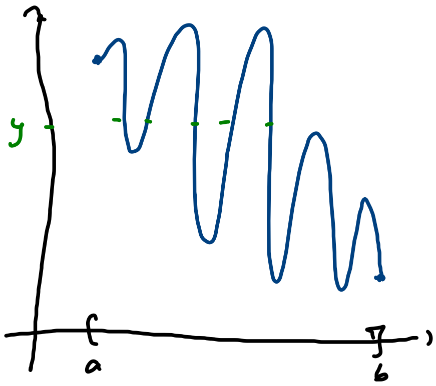


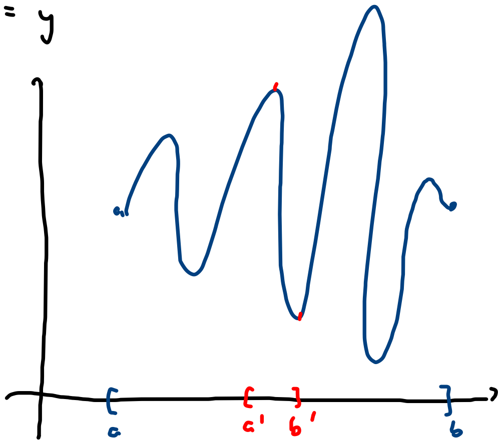
Satz (Zwischenwertsatz):

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < f(b)$.

Dann gilt $\forall\, y \in (f(a), f(b))\ \exists\, x_y \in (a,b) : f(x_y) = y$







„stetige Funktionen reißen nicht ab", „können Graphen zeichnen ohne Abzusetzen"

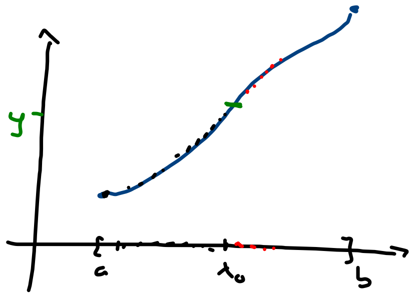
Beweis (Zwischenwertsatz):

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a) < f(b)$, stetig

| Ang. $\exists\, y \in (f(a), f(b)) : \forall\, x \in (a,b) : f(x) \neq y$.)

Sei $y \in (f(a), f(b))$

$\mathcal{M} := \{ x \in [a,b] : f(x) \leq y \} \neq \emptyset$



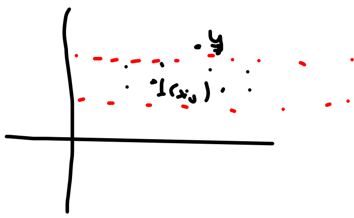
$a \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq [a,b]$

$\sup \mathcal{M} < b$

Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ mit $x_n \to \sup \mathcal{M} =: x_0$

Ind. $(x_n) \subseteq [a,b]$ $a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$

f stetig $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x_0) \leq y$ ($x_0 \neq b$)



Ang. $f(x_0) < y$.

$(x_n') := (x_0 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ OE $(x_n') \subseteq [a,b]$

$x_n' \to x_0$

f stetig $\Rightarrow$ $f(x_n') \to f(x_0)$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : f(x_n') < y$. ↯

$x_n' > x_0 := \sup \mathcal{M}$

Aber $x_n' \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow f(x_0) = y$ ∎

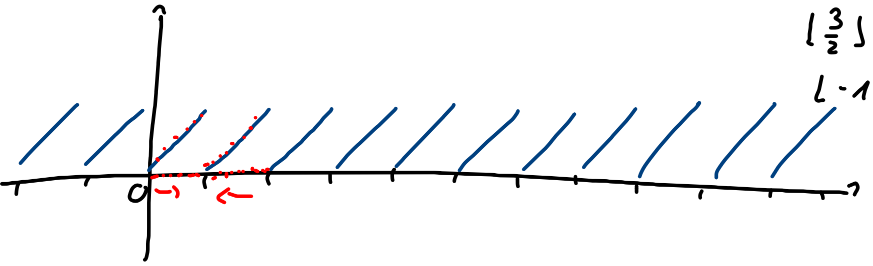
Nicht stetige Funktionen

Bsp: $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor := \max\{ z \in \mathbb{Z} : z \le x \}$

$\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$

$\lfloor -10 \rfloor = -10$



Wie zeigt man formal, dass f_3 nicht stetig ist?

1.) $\exists \, (x_n) \subseteq D, \; x_n \to x_0 : \; f(x_n)$ divergiert

2.) $\exists \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D, \; x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to y \neq f(x_0)$

3.) $\exists \, (x_n), (y_n) \subseteq D, \; y_n, x_n \to x_0$ so, dass $f(x_n) \to y_1, \; f(y_n) \to y_2$ mit $y_1 \neq y_2$.

Bel: f_3 nicht stetig (in 1)

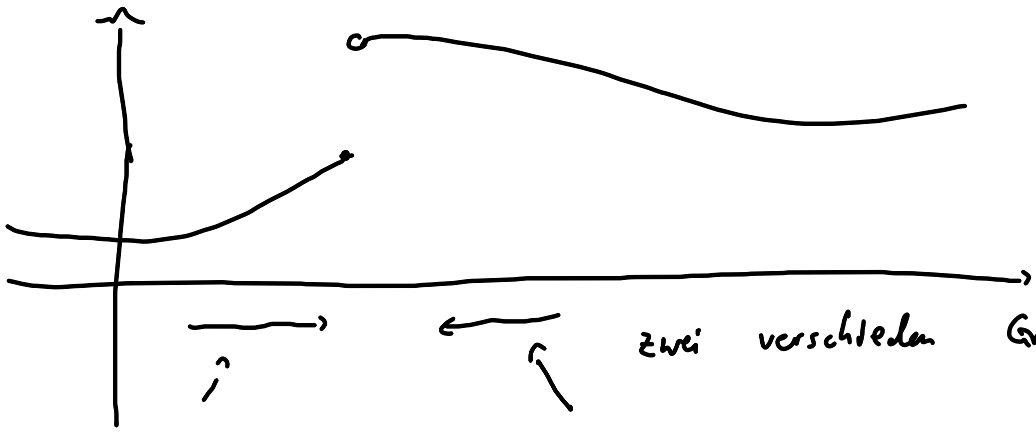
Beweis:

$x_n := 1 + \frac{1}{n+1} \to 1$

$f_3(x_n) = 1 + \frac{1}{n+1} - \lfloor \underbrace{1 + \frac{1}{n+1}}_{=1} \rfloor = \frac{1}{n+1} \to 0 = f_3(1)$

$x_n' := 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

$f_3(x_n') = 1 - \frac{1}{n+1} - \lfloor \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{=0} \rfloor = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \neq 0 = f(1)$.



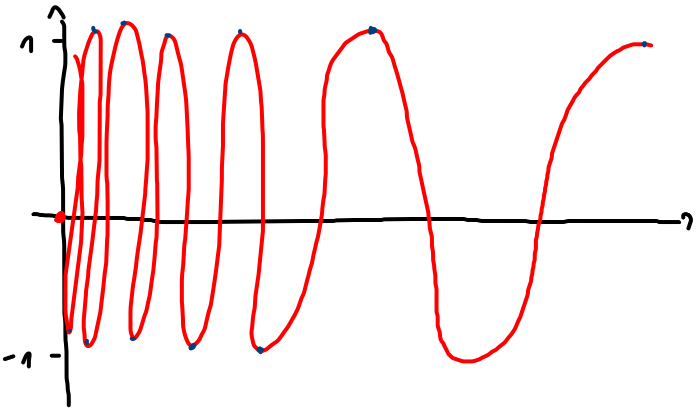
zwei verschieden Grenzwert für $f(x_n)$

Linksseitiger Limes Rechtsseitige Limes

B

Bsp:

$$f_4 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}$$



Frage: f_4 nicht stetig?

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$$

$$f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \to 0 = f(0) \checkmark$$

$$f(\tfrac{1}{n}) = \sin(n) \qquad n \neq \pi k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$x_n' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$$

$$f(x_n') = \sin(2\pi n + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$$

$$x_n'' = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}} \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n'') = -1 \to -1 \neq 0 = f(0)$$

$$x_n''' = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0 \qquad f(x_n''') = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases} = (-1)^n$$

2.) Rechenregeln:

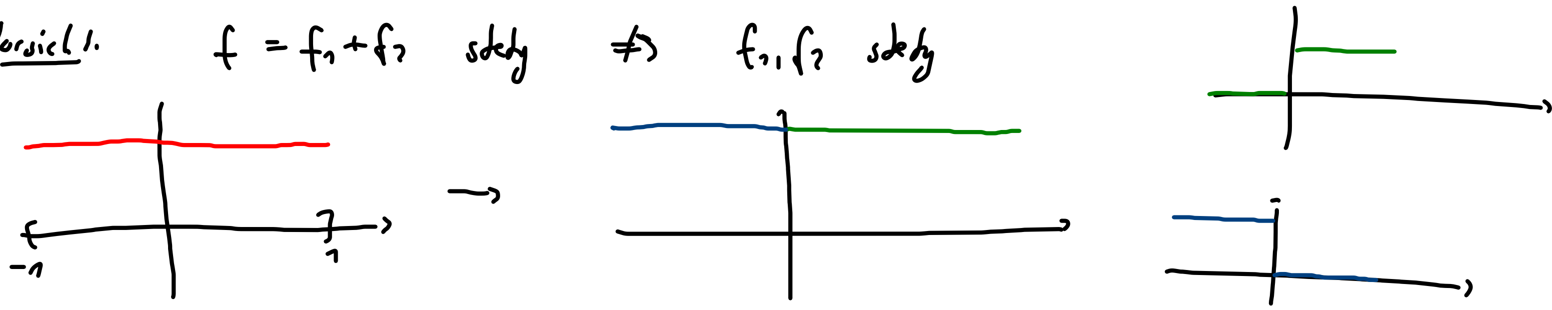
Für $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig gilt:

1.) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $af + bg$ stetig

2.) $f \cdot g$ stetig

3.) $\frac{f}{g}$ stetig auf $\tilde{D} := \{ x \in D \mid g(x) \neq 0 \} \subseteq D$

Vorsicht. $f = f_1 + f_2$ stetig $\not\Rightarrow$ f_1, f_2 stetig



$1 = \chi_{(-1,0)} + \chi_{[0,1)}$

auf $(-1, 1)$

$$\chi_D := \begin{cases} 1 & \text{auf } D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abcr. $f: D_1 \to D_2$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$ stetig
$g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$ stetig

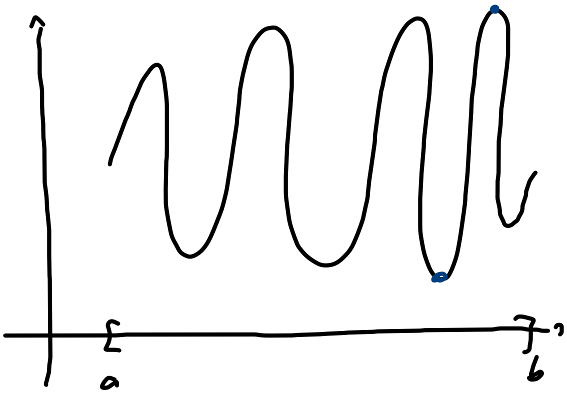
und: $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton
$\Rightarrow$ $f: D \to f(D)$ bijektiv, $f^{-1}: f(D) \to D$ stetig.

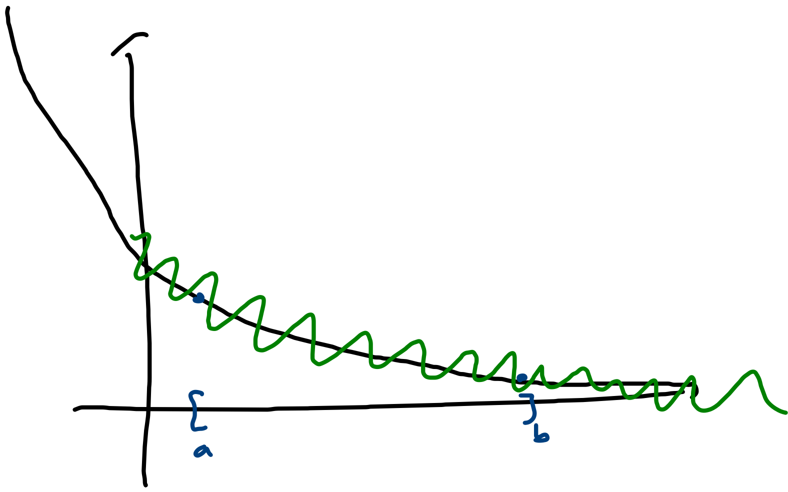
z.B.
x^m auf $[0,\infty)$ $\Rightarrow$ $\sqrt[m]{x}$ stetig.
stetig, streng monoton

~~exp~~ exp $\Rightarrow$ ln

3.) Eigenschaften stetige Fkt.

Übung: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf abgeschlossenen Intervall, denn f beschränkt (Bild f beschränkte Menge) und f nimmt sein Sup, Inf an.





$\frac{1}{\exp}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

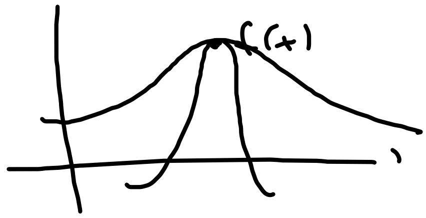
Aufg $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f > 0$

$\Rightarrow \inf_{[a,b]} f > 0 \qquad \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : f > \varepsilon > 0$

$\tilde{f}(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \sin(x) > 0$

Bel.: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$, $f(x) > 0$.

$\exists\, \varepsilon > 0$: $f > 0$ auf $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.



Beweis:

Ang: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tilde{x} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) : f(\tilde{x}) \leq 0$

Wähle $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$. Dann ex. $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ $\left(\Leftrightarrow |x_n - x| < \frac{1}{n} \right)$

und $f(x_n) \leq 0$.

Insb. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n \to x$

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $f(x_n) \to f(x)$ $\lightning$

$f(x) > 0$, $f(x_n) \leq 0$

Also $\exists\, \varepsilon > 0$: auf $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ gilt $f(\tilde{x}) > 0$

$\blacksquare$