Übersicht:

1.) komplexe Zahlen $\rightsquigarrow$ Polynome, trigonometrischen Fkt.

2.) Reihen

2.) Reihen

Sei: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge

$\rightsquigarrow$ Betrachte Partialsummenfolge $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$

Bsp:

1.) harmonische Reihe: $a_n = \frac{1}{n} \rightsquigarrow s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$

$s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, $s_4 = \dots$

2.) geometrische Reihe: $a_n = \frac{1}{2^n} \rightsquigarrow s_m = \sum_{n=1}^{m} 2^{-n}$

$s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{7}{8}$, ...

Wir sagen die Reihe konv, falls $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Schreiben $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für den Grenzwert.

Falls $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ unbeschränkt nach oben, schreiben manchmal $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Bsp: $a_n = 1$ $\quad s_m = \sum_{n=1}^{m} 1 = m$

Notwendiges Kriterium für Reihenfolgen:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge

Vorsicht: kein hinreichendes Kriterium!

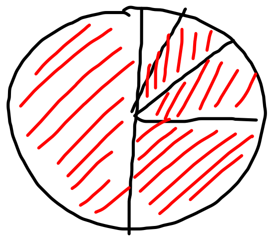
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Erinnere Übung: Für $|q|<1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{(m+1)}}{1-q}$$

$$\Rightarrow s_m = \sum_{n=1}^{m} q^n = \sum_{n=0}^{m} q^n - 1 = \frac{1-q^{(m+1)}}{1-q} - 1 \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{1-q} - 1$$

$q=\frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$



Trick: Schreiben Partialsummenfolge s_m als Folge in m um.

Bsp. ~~Reiht~~ $a_n := \frac{1}{n^2+n}$ $\qquad s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2+n}$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Partialbruchzerlegung: Finde $a, b \in \mathbb{R}$ (fest)

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \qquad | \cdot (n\cdot(n+1))$$

$$1 = a\cdot(n+1) + b\cdot n$$

$$= \underline{\underline{(a+b)}}\cdot n + 1\cdot a$$

a, b unabhängig von n $\longrightarrow$ $\begin{cases} a+b = 0 \\ 1\cdot a = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a = 1,\ b = -1$

(Koeffizientenvergleich von Polynomen

$p_1 = \sum a_k x^k \qquad p_2 = \sum b_k x^k$

erfülle: $p_1 \equiv p_2 \Rightarrow a_k = b_k \quad \forall k$)

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \underline{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1}} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n} = 1 + \cancel{\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}} - \cancel{\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}} - \frac{1}{m+1}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

In $\mathbb{R}$ (Übung in $\mathbb{C}$) haben wir das Cauchy-Kriterium,
d.h. es reicht zu zeigen, dass die Partialsummenfolge eine C-Folge ist.

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\left(\frac{n^3+2}{n^4+1+n} \right)}_{\leq 1} \cdot 2^{-n}$$

<u>Übungsaufgabe:</u> Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{m+1} - a_m| \leq 2^{-n}$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C-Folge

$$s_{m+1} - s_m = \sum_{n=1}^{m+1} \left(\frac{n^3+2}{n^4+1+n} \right) 2^{-n} - \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n^3+2}{n^4+1+n} \right) \cdot 2^{-n} = \underbrace{\left(\frac{(m+1)^3+2}{(m+1)^4+1+(m+1)} \right)}_{<1} \cdot \underbrace{2^{-m-1}}_{<2^{-m}} < 2^{-m}$$

__Übung:__ Augustin und Gottfried teilen sich auf folgende Weise eine Pizza:

Augustin ~~ißt~~ isst die halbe Pizza.

Dann isst Gottfried die Hälfte von dem was übrig ist.

Dann isst Augustin — " —

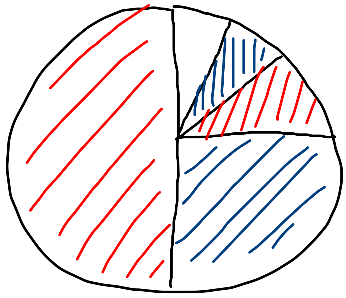
usw.

Welchen Teil hat Augustin und welchen Teil Gottfried gegessen?

Augustin isst $\frac{2}{3}$, Gottfried isst $\frac{1}{3}$

Stellen Anteile als Partialsummenfolgen der $(s_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$, $(s_m^2)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton

$$0 \le s_m^1, s_m^2 \le 1$$



Monotoniekriterium $\Rightarrow$ $s_m^1 \to x_1$, $s_m^2 \to x_2$

$$0 \le x_1, x_2 \le 1 \qquad x_1 + x_2 = 1$$

__Beobachtung__ ist: Augustin isst doppelt so viel $\rightsquigarrow$ $x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow$ $3x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$\begin{array}{cccccc} A & G & A & G & A & G \quad \dots \end{array}$$

G:

$$\sum_{k=1}^{l} 2^{-2k} = \sum_{k=1}^{l} 4^{-k} \xrightarrow[l \to \infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

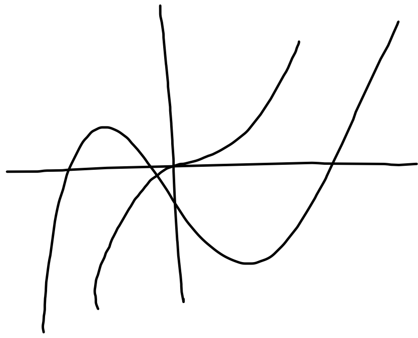
A:

$$\sum_{k=1}^{l} 2^{-(2k-1)} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{l} 2^{-2k} \xrightarrow[l \to \infty]{} \frac{2}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{l-1} 2^{-(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l-1} 2^{-2k} \xrightarrow[l \to \infty]{} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

1.) Komplexe Zahlen:

Polynome: $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $m \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$



<u>Erinnere:</u> p stetig und falls $\mathrm{Grad}(p)$ ungerade

$\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad p(x_1) < 0 < p(x_2)$

$\overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad p(x_0) = 0$ NST

Ungerade Polynome haben mind. 1 reelle NST

$\overset{\text{Polynomdiv.}}{\Longrightarrow}$ $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ $\qquad \mathrm{Grad}(q) = \mathrm{Grad}(p) - 1$

$p_1(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ $\qquad p_2(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

<u>Frage:</u> Geht das immer?

<u>Antwort:</u> Nein! $\quad p_3(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$ $\quad$ kein NST

$x^2 = -1$

Idee: Führe eine Zahl i ein so, dass $i^2 = -1$

komplexe Zahlen $\mathbb{C}$: $z = x \cdot 1 + y \cdot i$, $x, y \in \mathbb{R}$

Formal: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $1 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $i \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

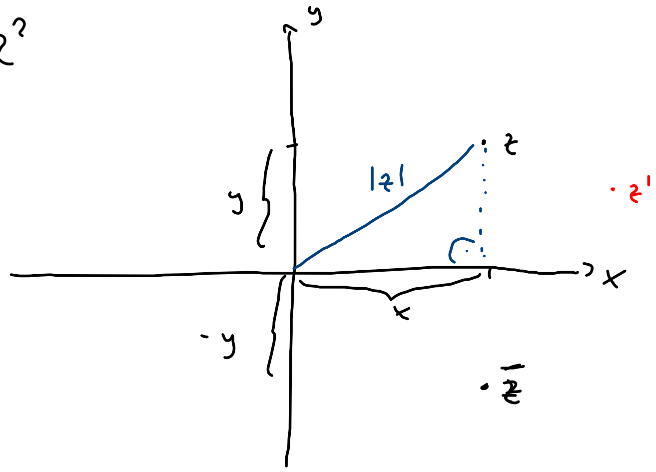
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

setze Mult auf $z = x + iy$ fort mit Distributivgesetz:

$$(x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist dann ein Körper

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$



$z = x + iy \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

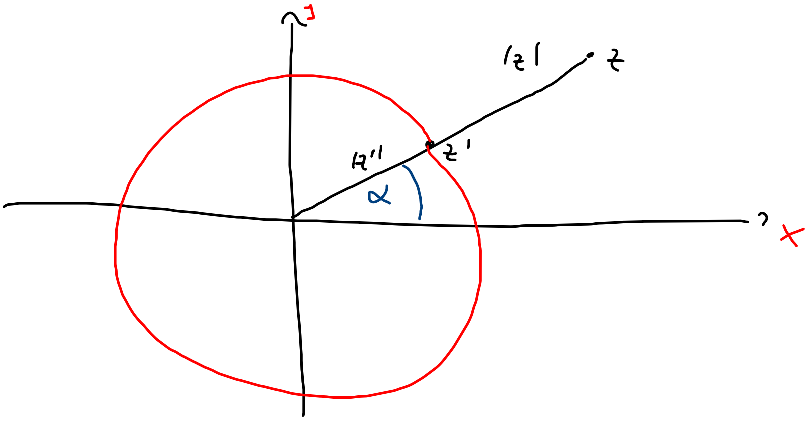
$x = Re(z)$ Realteil

$y = Im(z)$ Imaginärteil

Komplex Konjugierte : $\bar{z} = x - iy$

Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

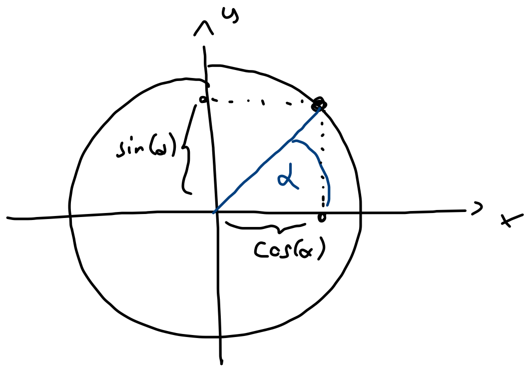
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$



<u>Polarkoordinatendarstellung:</u> $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |z| > 0 \rightsquigarrow z' := \frac{z}{|z|}, \quad |z'| = 1$

$$z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x' + iy', \quad (x')^2 + (y')^2 = 1$$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \quad x' = \cos(\alpha), \quad y' = \sin(\alpha)$$



$$z = |z| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= |z|\, e^{i\alpha}$$

$$e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}: \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

komplex. Mult + Additionstheoreme:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$z_1 = r_1 \cdot e^{i\alpha_1} \qquad z_2 = r_2 \cdot e^{i\alpha_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$