# Übersicht:

1.) Absolute Konvergenz von Reihen

↳ Wurzelkriterium + Quotientenkriterium

2.) Umordnungssatz und Riemannscher Umordnungssatz

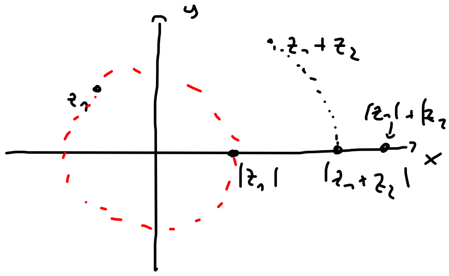
# 1.) Absolute Konvergenz von Reihen

<u>Erinnere:</u> $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Formel als Grenzwert (falls existent) als Partialsummenfolge

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n$$

Haben Konvergenzbegriff in $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ können komplexe Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ anschauen




Statt $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ in $\mathbb{C}$ zu betrachten, betrachten wir $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ und sagen $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>absolut konvergiert</u>, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

**Bemerkungen:**

- absolut Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz
- $|x_n| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n|$ monoton (wachsend)
- Mit Monotoniekriterium: Es reicht:

$$\exists\ C > 0 : \sum_{n=1}^{m} |x_n| \leq C \quad \forall\ m \in \mathbb{N}$$

**Majorantenkriterium:**

Falls eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\boxed{y_n \geq |x_n| \quad \forall\ n \geq n_0}$

und $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ konvergiert}}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konv.

**Bemerke:** $y_n = |y_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ konvergiert.

**Modellbsp:** Geometrische Reihe $0 < q < 1 : C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n}$

<u>Bsp:</u> (i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $\qquad x_n := \begin{cases} n & n < 10\,000 \\ 20\cdot(3+(-1)^n)^{-n} & n \geq 10\,000 \end{cases}$

$\forall\ n \geq n_0 := 10\,000$, dann gilt:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{20}\cdot(3+(-1)^n)^n = \begin{cases} \frac{1}{20}\cdot 4^n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{20}\cdot 2^n & n \text{ ungerade} \end{cases} \geq \frac{1}{20}\cdot 2^n$$

$\Rightarrow \quad x_n \leq 20\cdot 2^{-n} \quad \forall\ n \geq 10\,000$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (absolut) konvergiert.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ $\qquad \underline{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}}$ $\qquad \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{a}{(n-1)} + \frac{b}{(n+1)}$

$= 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1 \qquad \frac{2}{n^2+n} \geq \frac{2}{n^2+n^2} = \frac{2}{2n^2} = \frac{1}{n^2}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} < 2$$

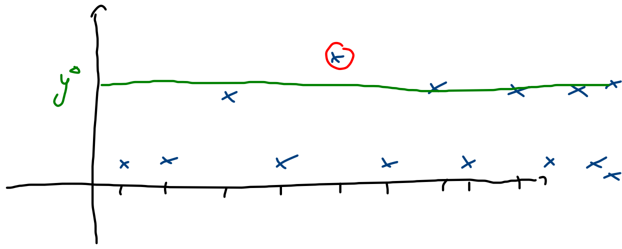
# Wurzel- und Quotientenkriterium

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe Folge. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (absolut) konvergent, falls

(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ (Wurzelkriterium)

(ii) $x_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ($x_n \neq 0 \ \forall\, n \geq N_0$)

$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$ (Quotientenkriterium)



**Bemerkung:** (Limes superior) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge

- $y^* = \limsup_{n\to\infty} y_n$ größter H.P. von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\limsup_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \mid k \geq n\}$
- Falls $(y_n)$ konvergent $\Rightarrow$ $\limsup_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n$
- Vorteil: Im Gegensatz zum Grenzwert einer Folge, ex. Limes Superior immer! (Falls $\pm\infty$ als gültige Werte zulassen)

Bsp: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n}{2n^2}\right)^{n}$ Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+n}{2n^2}\right)^n} = \frac{n^2+n}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n}{2n^2}\right)^n \quad \text{konv.} \quad (\text{absolut})$$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ Quotientenkriterium

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{10^n}{n!}\right)}\right| = \left|\underbrace{\frac{10^{n+1}}{10^n}}_{=10} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{10}{n+1} \longrightarrow 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} \quad \text{konv.} \quad (\text{abs.})$$

Beweisskizze: (Wurzelkriterium)

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ $\qquad$ $\left( \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \mid k \ge n\} \right)$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sup_{n \ge n_0} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists\, 0 < q < 1 : \sqrt[n]{|x_n|} \le q < 1 \iff |x_n| \le q^n < 1$

Vorsicht: Es reicht nicht $\sqrt[n]{|x_n|} < 1 \quad \forall n \ge n_0$

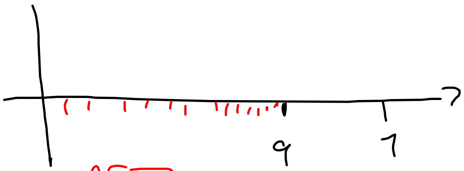
$\not\Rightarrow \sup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$

Nur $\le 1$

$\sqrt[n]{|x_n|} < 1$

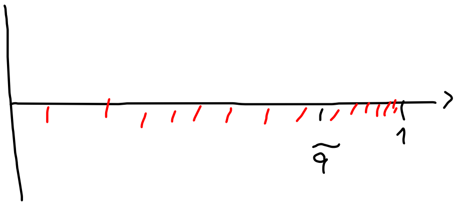
$\Rightarrow \exists q(n) : \sqrt[n]{|x_n|} < q(n) < 1$

$q(n) \longrightarrow 1$




$\sqrt[n]{|x_n|}$

Müssen in diesem Fall sein!



<u>Gegenbsp:</u> harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1 \longrightarrow 1$$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

$$< 1$$

---

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left( \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^2 \longrightarrow 1$$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \longrightarrow 1$$

Es gibt jedoch Reihen die konvergieren, aber nicht abs. konvergieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$ „alternierende harmon. Reihe"

Leibnizkriterium:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, eine monoton (fallende) Nullfolge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n \quad \text{konv.}$$

# Umordnungssatz

Unterschied zwischen Konvergenz (keine abs. Konv.) und abs. Konvergenz

## Riemannscher Umordnungssatz:

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konv., aber nicht abs. konvergiert ($(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$), dann gibt es für jede $c \in \mathbb{R}$, dann $\exists$ Umordnung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = c$$

## Umordnungssatz:

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. konv., dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$ ($f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion) absolut mit dem selben Grenzwert.

<u>Bsp:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konv. abs.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$$

Da die Reihe abs. konv., konv. Reihen aller ungerad. bzw. geraden Summanden (abs.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^{2k}}}_{=\left(\frac{1}{4}\right)^k} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Bsp: Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{2k} \right)$$

falsch: $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$

$$\infty - \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln(2) \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2)$$

# Übungen:

(i) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$$

(ii) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

# Lösungen

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

Mit Partialbruchzerlegung:

Finde $a, b$ so, dass $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$

$$\iff 1 = (k+1)a + b(k-1)$$
$$= (a+b)\cdot k + (a-b)\cdot 1$$

Lös: $\left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} a-b=1 \\ a=-b \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{array}$

$$\rightarrow \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right) \xrightarrow{m \to \infty} \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ $\quad \sqrt{n^2-1} \leq \sqrt{n^2} = n$

$m \geq 2$: $\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geq \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[\infty]{m} \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \infty$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n!}{n^n}\right)}\right| = \left| n^n \cdot (n+1)^{-n} \right| = \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \right|$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$

Die Reihe konv. absolut.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

Quotientenkriterium:

$$0 \leq \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right| = \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right|$$
$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)}_{\downarrow \, \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\downarrow \, e} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2n+2)}}_{\downarrow \, 0} \to 0$$

Sandwichlemma: $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to 0$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 0$

Die Reihe konv. absolut.