Übersicht.

1.) Doppelreihen

2.) Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$

3.) Stetigkeit und glm. Stetigkeit

4.) Pkt-weise und glm. Konvergenz von Funktionenfolgen

1) Doppelreihen

Statt $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_{k,l}$ $\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl} \right)$,

und wir verstehen sie folgendermaßen als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right)}_{y_k}$$

wobei y_k wohldefiniert sein muss und $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ ex.

Problem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right) \quad ?$$

Großer Umordnungssatz für Doppelreihen:

Für jede Doppelreihe über $(x_{kl})_{kl}$ in $\mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$ konvergiert

(b) $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$ konvergiert

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für <u>jede</u> Umordnung f

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für <u>eine</u> Umordnung f

und es gilt:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} \quad \text{für jede Umordnung.}$$

Bsp:

1.) $$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-m} = 1$$

Bemerke $n^{-m} \geq 0$, dass heißt es reicht Konvergenz für eine bel. Umordnung zu zeigen.

$n^{-m} = \left(\frac{1}{n}\right)^m$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} n^{-m} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\underbrace{1-\frac{1}{n}}} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-(n-1)}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

Cauchy-Produkt von Reihen

Sind $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{m=1}^{\infty} y_m = y$ absolut konvergent , so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut , wobei

$$z_k = \sum_{l=1}^{k} x_l \, y_{k+1-l}$$

und es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = x \cdot y$

Bsp. Für $|x| < 1$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n = \frac{e^x}{1-x}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1}$$

absolut konv.

$$\Rightarrow \frac{e^x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} x^{(k-l)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{x^{k-1}}{(l-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(l-1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(\sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{(l-1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^k}{l!}$$

2.) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)(i+j-1)^2}$ hängt nur von $i+j$ ab

$$\frac{1}{(i+j)(i+j-1)^2} \geq 0$$

Gruppieren Paare $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ über $i+j=k$, $k \geq 2$.

sollte mit ~~gee~~ geeignetem Faktor klappen

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{\underbrace{(i+j)}_{k}\underbrace{(i+j-1)^2}_{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)}{k\cdot(k-1)^2}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)} \quad \left(\leq 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergiert.} \right)$$

$k-1 \geq \frac{1}{2}k$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} \qquad = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1$$

3.) Stetigkeit und glm. Stetigkeit: $f: D \to \mathbb{C}$

Bisher: Stetigkeit über Folgenstetigkeit

f in $x_0 \in D$ stetig $:\Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Jetzt: Stetigkeit als $(\varepsilon-\delta)$ - Stetigkeit

f in $x_0 \in D$ stetig $:\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 : \forall y\in D: |x_0-y|<\delta \Rightarrow |f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$$

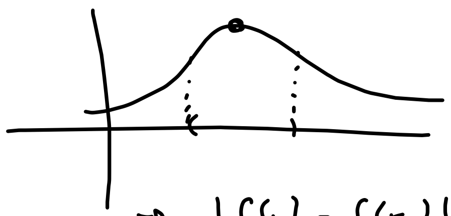
f stetig in $D \Longleftrightarrow \forall x_0\in D \; \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta=\delta(\varepsilon,x_0) \; \forall y\in D: |x_0-y|<\delta \Rightarrow |f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$

Bem.: $(\varepsilon-\delta)$ - Stetigkeit $\Longleftrightarrow$ Folgenstetigkeit

(Stetigkeit)

Prop: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig, $x_0\in(a,b)$ mit $f(x_0)>0$

Dann $\exists\,\delta>0$: $f(y)>0$ auf $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$



Beweis:

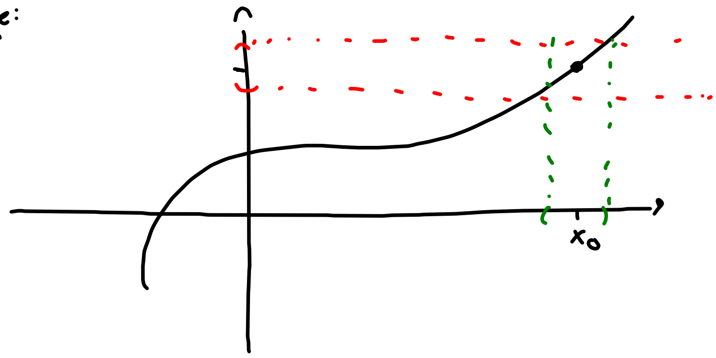
Da $f(x_0)>0$, wähle $\varepsilon := \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

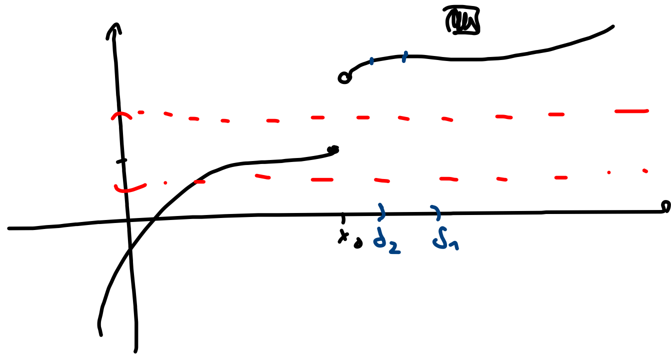
Dann $\exists\,\delta>0$ so, dass $\forall\, y\in(a,b)$: $|x_0-y|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x_0)|<\varepsilon$

($\Leftrightarrow y\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$)

$$f(y) = f(x_0)-f(x_0)+f(y) = f(x_0)-(f(x_0)-f(y)) \geq f(x_0)-|f(y)-f(x_0)|$$
$$> f(x_0)-\varepsilon > 0$$

Skizze:



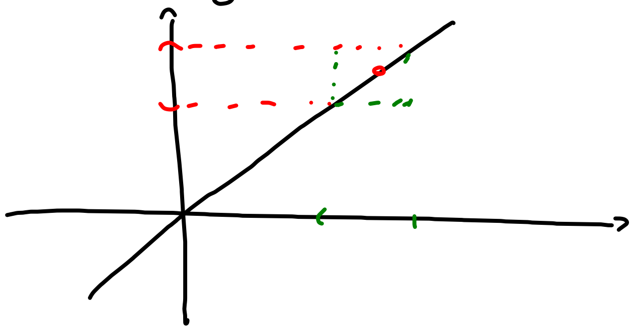


Bsp: 1.) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x \qquad (f = id_{\mathbb{R}})$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon > 0$

Dann gilt $\forall y \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$|f(y) - f(x_0)| = |y - x_0| < \delta = \varepsilon$ ∎



Wollen:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Haben $|x - x_0| < \delta$

$|f(x) - f(x_0)|$

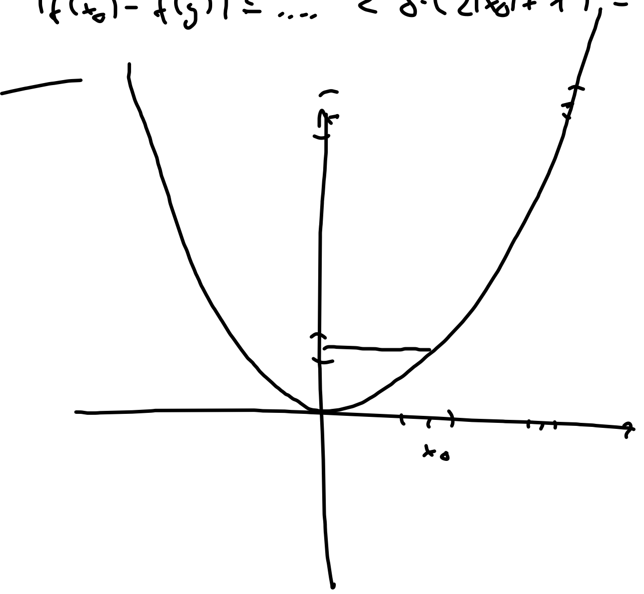
$= |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

<u>Bsp:</u> 2.) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ (ohne Rechenregeln)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right)$

Dann gilt $\forall y : |y - x_0| < \delta$

$|f(x_0) - f(y)| \leq \dots < \delta \cdot (2|x_0| + 1) = \varepsilon$



<u>NR:</u>

$|f_2(y) - f_2(x_0)|$

$= |y^2 - x_0^2|$

$= |y - x_0| \cdot |y + x_0|$

$\leq |y - x_0| \cdot (|y| + |x_0|)$

$\leq |y - x_0| \cdot (2|x_0| + \delta)$

$< \underline{\delta \cdot (2|x_0| + \delta)}$

$\leq \underbrace{\delta \cdot (2|x_0| + 1)}_{= \varepsilon}$

$|y - x_0| < \delta$

$y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$-|x_0| - \delta \leq x_0 - \delta \leq y < x_0 + \delta \leq |x_0| + \delta$

$-|x_0| - \delta = -(|x_0| + \delta)$

$\Rightarrow |y| \leq |x_0| + \delta$

$\delta \leq 1$

keine pkt-weise Def.

Glm Stetigkeit:

$f: D \to \mathbb{C}$ glm stetig

$:\Longleftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, y \in D: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Downarrow \qquad \not\Uparrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 \ \forall y \in D: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(Rep 1: $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij}$, Grund „$\forall \exists \neq \exists \forall$"

Bsp: f_1 glm stetig, f_2 nicht glm. stetig.

Aber: Satz: $f: K \to \mathbb{C}$ stetig, K Kompaktum (z.B. $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

$\Rightarrow f$ glm stetig auf K

f_2: $\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}, 1 \right)$ ← nicht unabhängig von x_0!

Aber $\xrightarrow{|x_0| \to \infty} 0$ Aber $\forall x_0 \in [a,b] \Rightarrow |x_0| \leq \max\{|a|, |b|\} =: C$

$\delta_0 := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+2C}\right) \leq \delta(x_0, \varepsilon)$