1.1 Doppelreihen

Statt Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ betrachten wir nun $\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{k,l}$, wobei wir die Doppelsumme verstehen als $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{k,l} \right)}_{y_k}$ wobei wir sicherstellen müssen, dass y_k wohldefiniert ist.

Problem: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k,l} \right)$?

Berechtigte Frage, denke an Riemannschen Umordnungssatz.
(Für $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, ex $\forall c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = c$)

Großer Umordnungssatz für Doppelreihen

Für jede Doppelreihe $(x_{k,l})$ in $\mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für eine Anordnung f

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für jede Anordnung f.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_{k,l}| \right)$ konvergiert

(b) $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k,l}| \right)$ konvergiert.

Dann gilt ebenfalls:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{k,l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{k,l} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$$

für jede Anordnung von f.

Bsp:

1.) ~~$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^{-m}$~~ $\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-m}$

Bemerke $x_{nm} := n^{-m} \geq 0$ also reicht es die Konvergenz für eine der beiden Summationsreihenfolge bzw. einer bel. Anordnung nachzuweisen.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty} n^{-m}}_{\text{geom. Reihe}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \overset{m=0}{1} - \overset{m=1}{\frac{1}{n}} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} - 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-(n-1)}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Berechne über Partialsummen: $k \geq 2$

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \overbrace{\sum_{n=2}^{k-1} - \sum_{n=2}^{k-1}}^{\text{Teleskopsumme}} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

2.) $\sum_{i,j=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(i+j)(i+j-1)^2}}_{\geq 0}$ hängt nur von $i+j$ ab. also sammle alle Paare (i,j) mit $i+j=k$

Es reicht eine konv. Anordnung zu finden

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{(i+j)(i+j-1)^2}$$

Es gibt genau $k-1$ Paare (i,j) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i+j=k$, $k \geq 2$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{konv}$$

bzw. Partialbruchzerlegung + Teleskopsummen

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Also sind 2.) und 1.) dasselbe die gleiche Zahl und im ganz Wesen dieselbe Reihe

Cauchy-Produkt von Reihen

Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ und $\sum_{m=1}^{\infty} y_m = y$ absolut konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut mit

$$z_k := \sum_{n=1}^{m} x_n y_{m+1-n}$$

und es gilt: $$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = x \cdot y$$

Bsp: Für $|x| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n = \frac{e^x}{1-x}$,

denn

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad a_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} \overset{|x|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \qquad b_k = x^{k-1}$$

Beide Reihen absolut konvergent.

$$\Rightarrow \frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \cdot x^{n-k}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-1}}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^n}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!}$$

Bsp für die Notwendigkeit der absoluten Konvergenz.

Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konv. nicht absolut ($\sqrt{n} \le n$), aber konvergiert nach Leibnizkriterium ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ monoton fallende Nullfolge)

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n+1-k+1}}{\sqrt{n+1-k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}$$

$$\overset{\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}}_{=: c_n}$$

mit $$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \ge 1$$

$\Rightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ die Reihe konv. nicht!

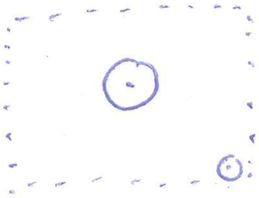
2.) Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$

Wir definieren den offenen Ball in $\mathbb{C}$ als $B_\delta(z) := \{ w \in \mathbb{C} : |w-z| < \delta \}$.

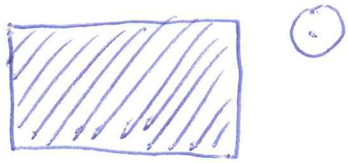
Wir nennen eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$

1.) offen, falls $\forall z \in D : \exists \delta > 0 \ B_\delta(z) \subseteq D$

$\left(D = \bigcup_{z \in D} B_{\delta(z)}(z) \right)$



2.) abgeschlossen, falls $D^c = \mathbb{C} \setminus D$ offen



3.) beschränkt, falls ein $C > 0$ ex. so, dass

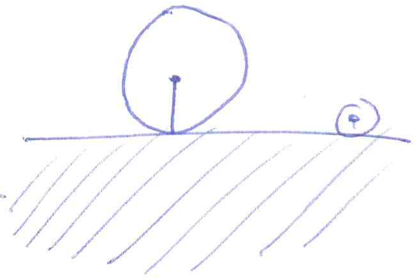
$D \subseteq B_C(0) \quad (\forall d \in D : |d| < C)$

(auch $D \subseteq B_C(z')$ für geeignete $C > 0, z' \in \mathbb{C}$)

4.) kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt.

Übliche Konventionen: O, U, V offen, A abgeschlossen, K kompakt.

Bsp: $O := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$



Sei $z \in O$, d.h. $\operatorname{Im} z > 0$. Wähle $\delta := \operatorname{Im} z$.

Z.z. $B_\delta(z) \subseteq O$

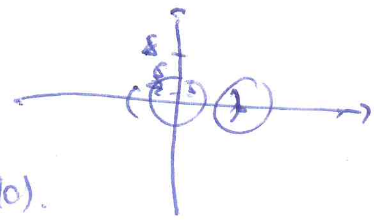
Sei $w \in B_\delta(z)$, d.h. $|w - z| < \delta$.

$\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w \leq |\operatorname{Im}(z-w)| \leq |w-z| < \delta = \operatorname{Im} z$

$\Longleftrightarrow \operatorname{Im} w > 0$

Im Allgemeinen müssen Mengen jedoch weder offen, noch abgeschlossen sein.

Bsp. $(-1,1) = (-1,1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$



- nicht offen, denn für $0 \in (-1,1) \times \{0\}$ und für $\delta > 0$ wähle $w = \frac{\delta}{2} i \notin (-1,1)$, aber $|w - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, also $w \in B_\delta(0)$.

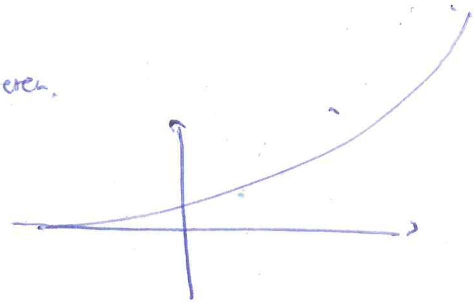
- nicht abgeschlossen: Z.z. $\mathbb{C} \setminus ((-1,1) \times \{0\})$ nicht offen.

Wähle $1 \in \mathbb{C} \setminus ((-1,1) \times \{0\})$ und für $\delta > 0$ wähle $1 - \frac{\delta}{2} \in (-1,1)$.

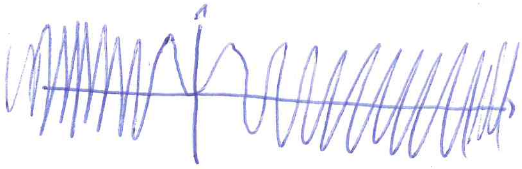
Also $B_\delta(1) \cap ((-1,1) \times \{0\}) \neq \emptyset \ \forall \delta > 0$

Muss also immer explizite δ-Bälle konstruieren.

Schwierig für komplizierten Menge.



$O_1 := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > \exp(\operatorname{Re}(z))$

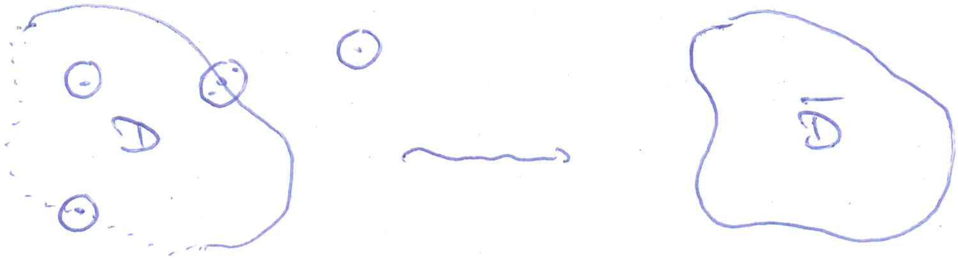


$O_2 := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > \sin(\operatorname{Re}(z)^2)$

Haben in der Vorlesung auch definiert:

Rand einer Menge ∂D: $z_0 \in \mathbb{C}$ ist Randpunkt von D

$:\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists z_1 \in D, z_2 \in D^c : |z_1 - z_0|, |z_2 - z_0| < \delta$



Definiere weiterhin den Abschluss:

$$\bar{D} = D \cup \partial D = \{ z \in \mathbb{C} : \forall \delta > 0 : \exists d \in D : |z - d| < \delta \}$$

Haben folgenden hilfreichen Satz aus den Übungen / Vorlesung:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) D abgeschlossen

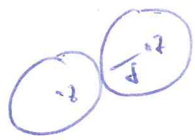
(ii) $D = \bar{D}$

(iii) $\forall$ konvergenten Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, folgt $z_0 \in D$.

(iii) sehr nützlich, da viel Theorie über konvergente Folgen.

Bsp: Vorlesung: $\cancel{B_r(z)}$ $A := \{ w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \le r \}$ ~~abgeschlossene Ball~~ abgeschlossen.

Beweis ohne δ-Bälle



Sei $(z_n)_n \subseteq A$ mit $z_n \to z_0$.

Z $z_0 \in A$, d.h. $|z_0 - w| \le r$ }

Da $z_n \to z_0$ folgt auch $\operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z_0)$, $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z_0)$.

und

$$\underbrace{|z_n - z|}_{\le r} = \sqrt{(\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z))^2} \longrightarrow \underbrace{\sqrt{(\operatorname{Re}(z_0) - \operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z_0) - \operatorname{Re}(z))^2}}_{= |z_0 - z|}$$

$\Rightarrow |z_0 - z| \le r \Rightarrow z_0 \in A$

∎

Übung: Zeige nun O_1, O_2 offen

Beweis:

Es reicht zu zeigen O_1^c, O_2^c abgeschlossen.

Folgt aus folgd Hilfsbehauptung:

Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $A_f := \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \leq f(\mathrm{Re}(z)) \}$ abg.

Beweis:

Sei $(z_n) \subseteq A_f$ mit $z_n \to z_0$

z.z. $z_0 \in A_f$. $x_n :=$

Es gilt wieder: $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z_0) =: x_0$ $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z_0) =: y_0$

Angenommen $\mathrm{Im}(z_0) > f(\mathrm{Re}(z_0))$.

$\Rightarrow$ Für $y_0 - f(x_0) - \delta_0 > 0$, $\delta_0 := \frac{y_0 - f(x_0)}{2}$

Betr die Abb $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y - f(x) - \delta_0$

Da $\tilde{f}$ stetig mit $\tilde{f}(x_0) > 0$ $\exists\, \delta > 0$ so, dass

$\tilde{f}(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\lightning$ $x_n \to x_0$ schl. irgendwann $|x_n - x_0| < \delta$

$|y_n - y_0| < \delta_0$

$(y_n > y_0 - \delta_0)$

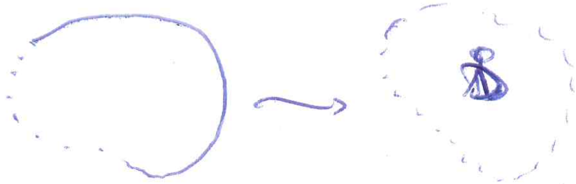
$\Rightarrow$

$y_n - f(x_n) > y_0 - f(x_n) - \delta_0 > 0$

$\Rightarrow$ $y_n > f(x_n)$ $\lightning$

Kommentar:

- da wir 1:1 auch auf $\mathbb{R}^n$ haben, können wir alles analog für $\mathbb{R}^n$ definieren (Ana 2)
- $\partial(\mathbb{C} \setminus D) = \partial D$
- Inneres $\mathring{D} = D \cap (\mathbb{C} \setminus \partial D)$ (offen)



(3.) Stetigkeit und glm. Stetigkeit

$f: D \to \mathbb{C}$

Bisher: Stetigkeit als Folgenstetigkeit

f in x_0 stetig $:\Longleftrightarrow$ $\forall$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Jetzt: Stetigkeit als ε-δ-Stetigkeit:

f in x_0 stetig $\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y \in D$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

und f stetig auf D $:\Longleftrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 : |x-y| < \delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Bem: Folgenstetigkeit äquivalent zu $(\varepsilon$-$\delta)$-Stetigkeit (oft sagen wir deshalb einfach stetig)

Prop: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > 0$.
Dann ex. $\delta > 0$ so, dass $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ und $f(y) > 0\ \forall y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Beweis: (mit ε-δ-Stetigkeit)

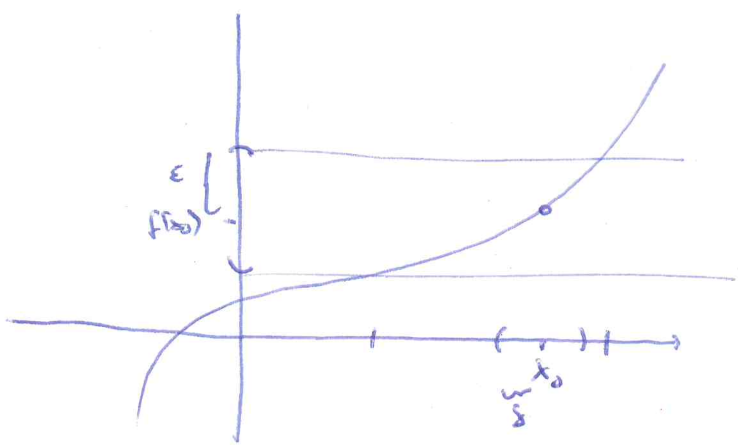
Sei x_0 wie oben mit $f(x_0) > 0$. Wähle $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$.
Dann wähle $\delta_0 := \delta(x_0, \varepsilon)$ nach der Stetigk., d.h.
$\forall y \in (a,b)$ mit $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$.

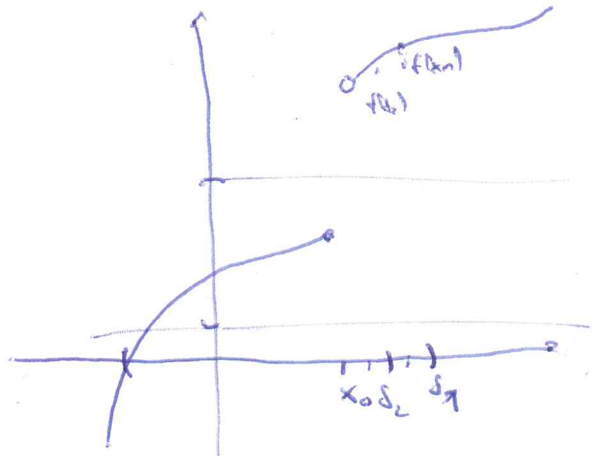
Wähle $\delta \le \delta_0$ so, dass $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ (möglich, da (a,b) offen in $\mathbb{R}$)
$(x_0-\delta, x_0+\delta) = B^{\mathbb{R}}_\delta(x_0)$

Dann gilt $\forall y \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$:

$$f(y) = f(x_0) - f(x_0) + f(y)$$
$$= f(x_0) - (f(x_0) - f(y)) \ge f(x_0) - |f(x_0) - f(y)|$$
$$> f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \qquad \blacksquare$$

Skizze:





Bsp. 1.) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x$ $\quad (f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon > 0$.
Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Rechnung:

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0|$$

Bsp. 2.) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$ (ohne Rechenregeln für stetige Fkt.)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right)$.
Für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt dann insbesondere
$|x| \le |x_0| + \delta \le |x_0| + 1$ und dass

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)|$$
$$\le \dots$$
$$< \delta \cdot (2|x_0| + 1)$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \cdot (2|x_0| + 1) = \varepsilon$$

Nebenrechnung:

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = |x^2 - x_0^2|$$
$$= |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$
$$\le |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|)$$
$$\le |x - x_0| \cdot (2|x_0| + \delta)$$

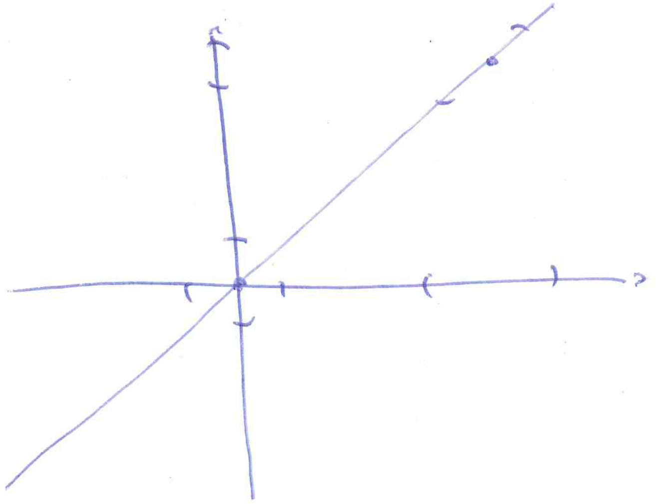
OE $\delta \le 1$
$$< \delta \cdot (2|x_0| + 1)$$

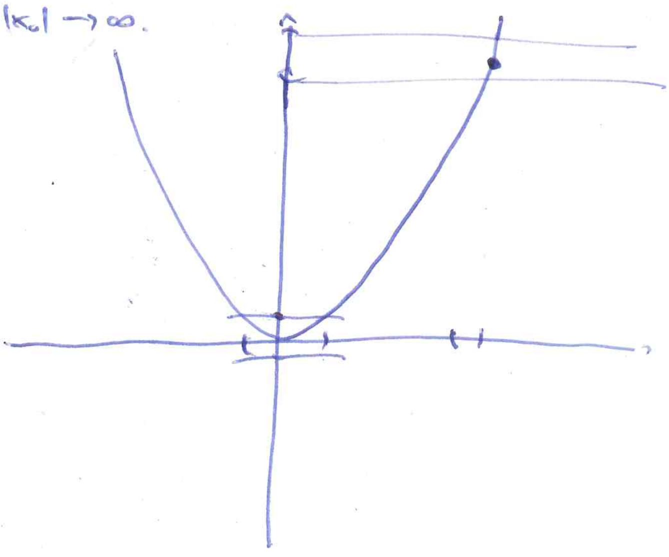
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\underbrace{-|x_0| - \delta}_{= -(|x_0| + \delta)} \le x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \le |x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow |x| \le |x_0| + \delta$$

Wir sehen, dass f_1, f_2 stetig, wobei bei f_1 die Wahl $\delta = \varepsilon$ nicht von x_0 abhängig, aber für f_2 die Wahl $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right)$ explizit von $|x_0|$ abhängig und wir sehen $\delta \to 0$ für $|x_0| \to \infty$.





<u>gleichmäßige Stetigkeit:</u> kein Punktweise Definition, sondern auf Definitionsbereich

Wir nennen $f: D \to \mathbb{C}$ glm stetig in D, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\not\Updownarrow \quad \text{nur} \quad \Downarrow$$

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \ \forall y \in D : |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

[Vgl. Bsp 1: $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} U_{ij} \subseteq \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_{ij}$ aber i.A. nicht „="

„$\forall \exists \neq \exists \forall$"]

<u>Siehe Bsp:</u>

f_1 glm stetig, aber f_2 nicht glm stetig, da Wahl von δ explizit von $|x_0|$ abhängig

<u>Wir sehen auch:</u> Vorsicht!

Die Rechenregeln für stetige Fkt sind i.A. nicht für glm. Fkt gültig!

<u>Wir haben jedoch auch folgenden Satz aus der Vorlesung:</u>

<u>Satz:</u> Sei $f: K \to \mathbb{C}$ stetig, $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

Dann ist f auf K glm stetig.

<u>Bsp:</u> z.B. die $[a,b] \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

$f_2: [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \quad \Rightarrow \forall x_0 \in [a,b] : \quad |x_0| \leq \max\{|a|, |b|\} =: C$

$$0 < \delta_C(\varepsilon) := \min\left\{\frac{\varepsilon}{C+1}, 1\right\} \leq \delta(\varepsilon, x_0)$$

Dann ist $\delta_C(\varepsilon)$ eine gültige Wahl von δ unabhängig von x_0!

(klappt nicht auf $\mathbb{R}$, da wir dann kein solches C finden)

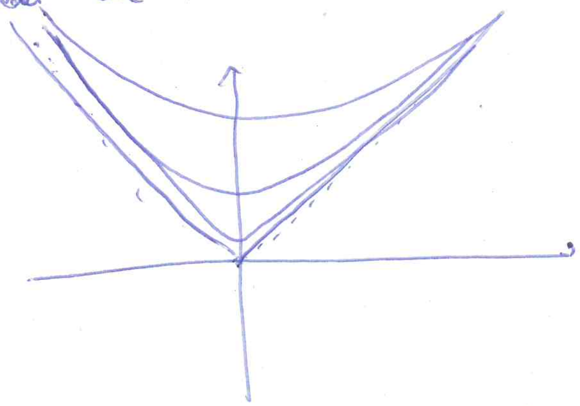
Können ebenso Bolzano-Weierstraß für kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{C}$ beweisen, insbesondere ist jedes stetige $f: K \to \mathbb{C}$ beschränkt und nimmt Max. und Min. an,

Kompakta auf $\mathbb{C}$ (bzw. analog definiert auf $\mathbb{R}^n$) sind die richtige Verallgemeinerung von abg. Intervallen $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Mehr zur Beziehung von stetig Fkt, offenen Mengen und Kompakta in Ana 2!

4) Funktionenfolgen:

Anstatt Folgen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ betrachten wir nun Folgen von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: D \to \mathbb{C}$ und fragen uns, ob wir für $n \to \infty$ wieder eine Funktion als Grenzwert erhalten



Def: Wir sagen $f_n: D \to \mathbb{C}$

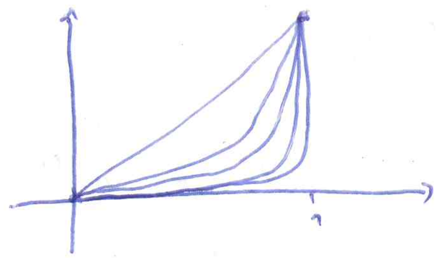
(a) konvergiert punktweise gegen $f: D \to \mathbb{C}$, falls
$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

„für jedes $x \in D$, konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ gegen den Grenzwert $f(x)$"

Dabei vergleichen wir nicht, wie schnell die Folge an zwei unterschiedlichen Stellen $x_1, x_2 \in D$ konvergieren.

$f_n: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, denn konv (f_n) punktweise gegen $f: (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$,

da $x^n \to 0 \ \forall \ x \in (0,1)$



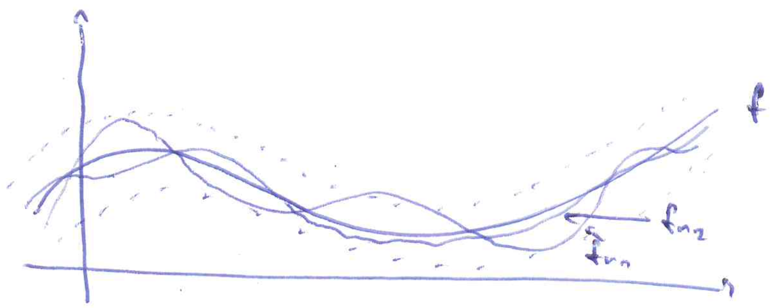
(b) konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{C}$, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

„die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren für alle $x \in D$ mit vergleichbarer Geschwindigkeit"

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{=: x_n \in \mathbb{R}} \to 0, \quad \text{wobei} \quad \|g\|_{D,\infty} := \sup_{x \in D} |g(x)| \in \mathbb{R}$$

„Supremumsnorm"

Ähnlich wie für reelle Folgen (x_n), können wir uns für reellwertige Funktionen-folgen vorstellen, dass alle Folgeglieder irgendwann in einem ε-Schlauch um den Grenzwert liegen.



<u>Bemerkung:</u>

1.) $f_n \to f$ glm $\Rightarrow$ $f_n \to f$ pktw.

2.) $f_n : D \to \mathbb{C}$ stetig, $f_n \to f : D \to \mathbb{C}$ glm,

$\Rightarrow$ $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.

[Anwendung: $f_n := \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =: f$ glm auf allen Kompakta $K \subseteq B_\rho(0)$,

ρ Konvergenzradius

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig auf $B_\rho(0)$]

<u>Wie weist man in einem konkreten Fall nach, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig (gegen eine möglicherweise unbestimmte Grenzfunktion) konvergiert?</u>

1.) Falls Grenzfunktion f nicht klar, weise zunächst punktweise Konvergenz zu einem f nach.

2.) Überlege ob in Schritt 1.), n_0 unabhängig von x gewählt werden kann, oder versuche zu zeigen, dass $f_n \not\to f$

(da $f_n \to f$ pktw, kann es keinen anderen Kandidaten für glm. Limes geben)

Negation gleichmäßiger Konvergenz (gegen festes f):

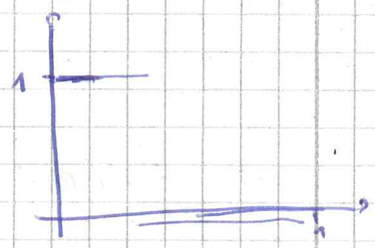
$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists x \in D \; \exists n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Bsp:

1.) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} 1 & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$

Beh: $f_n \to f : (0,1) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 0$ pktw, aber nicht glm.

Beweis:



Zeige zunächst pktw. Konvergenz:

Sei $\varepsilon > 0$, $x \in (0,1)$.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n_0} < x$ (Satz von Eudoxos). Dann gilt $\forall n \ge n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \underbrace{|f_n(x)|}_{\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < x} = 0 < \varepsilon.$$

z.z. $f_n \not\to f$ glm.

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Wähle $n_0 = n$ und $x_0 = \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{n_0}$.

Dann gilt $|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_{n_0}(x_0)| = 1 > \varepsilon$

2.) Sei $0 < q < 1$, und betr.

$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} x^n & 0 < x \le q \\ 0 & x > q \end{cases}$

Beh: ~~$f_n \to f : (0,1) \to \mathbb{R}$~~

Für $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 0$ gilt $f_n \to f$ glm.

Beweis:

z.z. $f_n \to f$ pktweise.

Für $x > q$ klar, da dann $f_n(x) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $0 < x \le q < 1$ gilt mit Ana I $x^n \to 0$, d.h.

Insg.: $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in (0,1) \; \exists \underset{n_0(\varepsilon, x)}{n_0 \in \mathbb{N}} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Also pktw Konvergenz

Z: $f_n \to f$ glm.

Haben bisher nur gezeigt, dass $x^n \to 0$ $\forall x \in [0,1)$

Jetzt: Bessere Wahl von n_0.

Bew.

Für $0 < x \le q \Rightarrow f_n(x) = x^n \le q^n$

und für $x > q \Rightarrow f_n(x) = 0 \le q^n$

$\Rightarrow \forall x \in (0,1): f_n(x) \le q^n$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge ($q < 1$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$\forall n \ge n_0: \quad |q^n - 0| < \varepsilon$

Dann gilt für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ (unabhängig von x), für alle $x \in (0,1)$:

$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x) < q^n < \varepsilon$

$\blacksquare$