Übersicht:

1.) Differenzierbarkeit

2.) Optimierung

↳ Mittelwertsatz

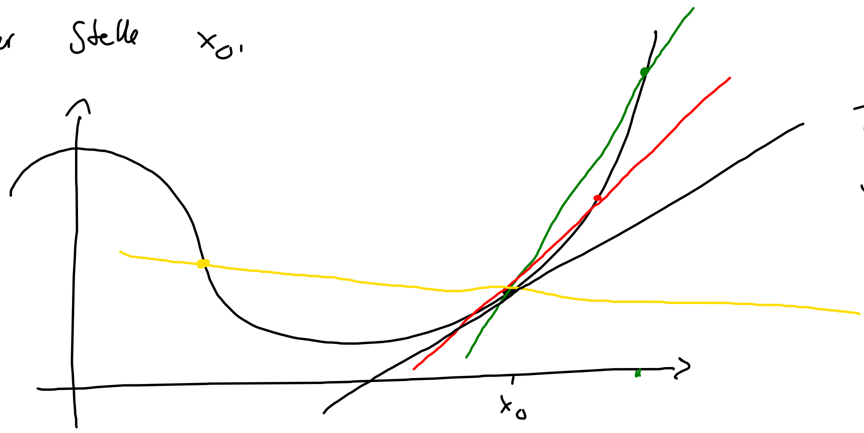
1.1 Differenzierbare Funktionen

Im Folgenden ist I immer ein (offenes) Intervall

Definition. Wir nennen $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung $f'(x_0)$ von f an der Stelle x_0.



Tangente an $f(x_0)$ mit Steigung $f'(x_0)$

Bem.:

1.) $(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x_0) : \; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

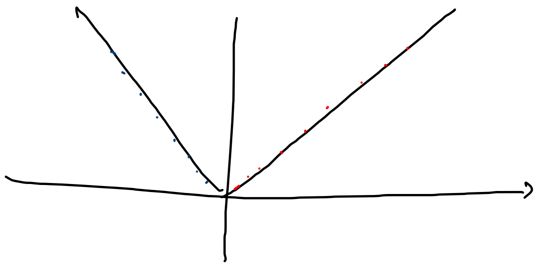
$\iff \forall$ Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$$

$$\iff g_f : I \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

dann ist g_f stetig in x_0 (Vorsicht: Im Allgemeinen ist g_f nicht stetig auf I)

Bsp.: $x \mapsto |x|$



Beh. Nicht diffbar in 0

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$: $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{n}{n} = 1 \to 1$

$y_n = -\frac{1}{n} \to 0$: $\frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -\frac{n}{n} = -1 \to -1$

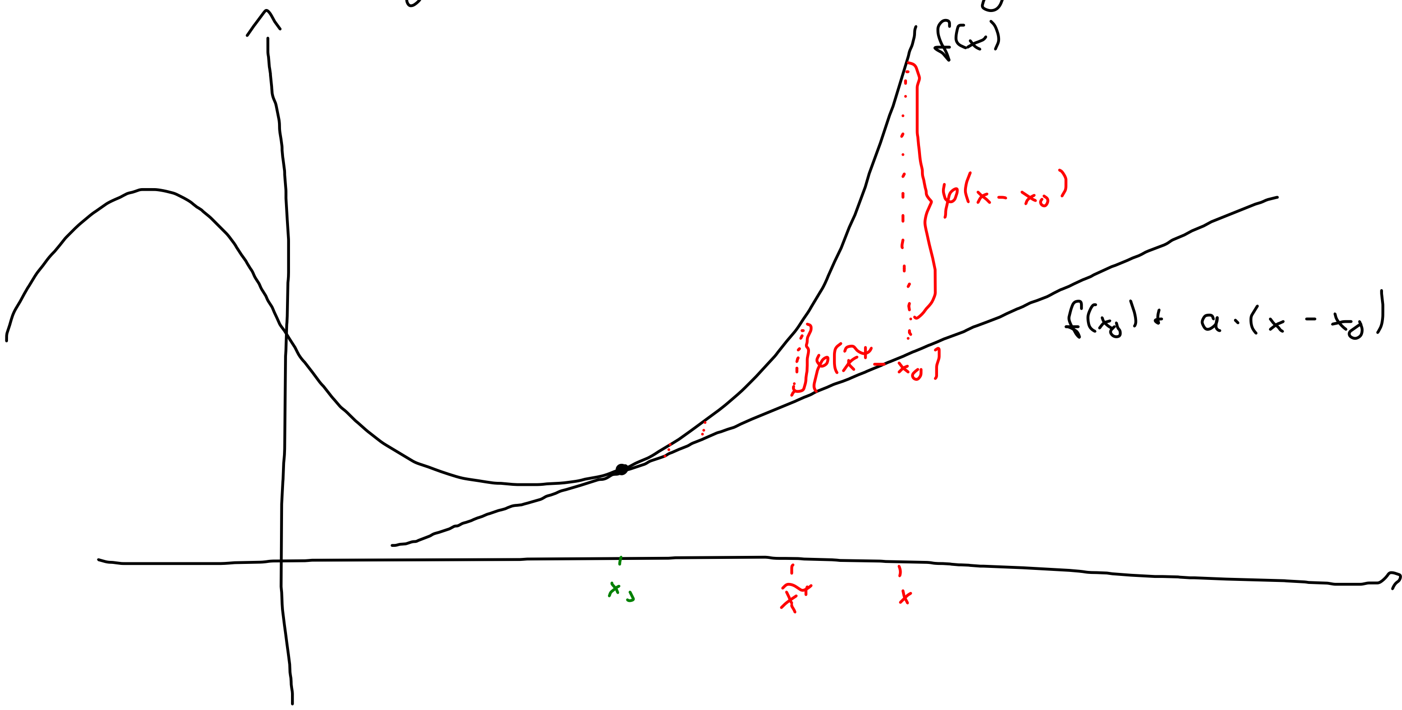
$\{x - x_0 \mid x \in I\}$

<u>Prop:</u>

f in x_0 diffbar $\iff \exists\, a \in \mathbb{R},\ \varphi : \overset{!!}{I - x_0} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + a(x - x_0)}_{\text{lineare Approximation}} + \varphi(x - x_0) \quad \text{mit} \quad \frac{\varphi(x - x_0)}{|x - x_0|} \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

Weiterhin sind a, φ eindeutig bestimmt und es gilt $a = f'(x_0)$



<u>Bem:</u> f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Beweis: (Eindeutigkeit)

Angenommen $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$, $\varphi, \tilde{\varphi} : I - x_0 \to \mathbb{R}$, $\frac{\varphi(x-x_0)}{|x-x_0|}, \frac{\tilde{\varphi}(x-x_0)}{|x-x_0|} \to 0$ für $x \to x_0$

gilt:

$$\tilde{a} \cdot (x-x_0) + \tilde{\varphi}(x-x_0) = f(x) - f(x_0) = a \cdot (x-x_0) + \varphi(x-x_0)$$

Wir sehen $a = \tilde{a} \iff \varphi = \tilde{\varphi}$, d.h. es reicht zu zeigen $a = \tilde{a}$.

Angenommen $a \neq \tilde{a}$

$$\tilde{\varphi}(x-x_0) = (a-\tilde{a})(x-x_0) + \varphi(x-x_0)$$

$$\frac{\tilde{\varphi}(x-x_0)}{\cancel{x}-x_0} = \frac{(a-\tilde{a})(x-x_0) + \varphi(x-x_0)}{x-x_0} = \underbrace{(a-\tilde{a})}_{\to\, a-\tilde{a} \neq 0} + \underbrace{\frac{\varphi(x-x_0)}{x-x_0}}_{\to\, 0}$$

Insb. $\frac{\tilde{\varphi}(x-x_0)}{|x-x_0|} \not\to 0$ ↯

∎

Konsequenz: Können Ableitungen durch geschicktes Raten bestimmen.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 = (x - x_0 + x_0)^2 = (x_0 + (x - x_0))^2 = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2$$
$$= f(x_0) + \underbrace{2x_0(x - x_0)}_{\text{linear}} + \underbrace{(x - x_0)^2}_{\substack{\text{quadratisch} \\ =: \varphi(x - x_0)}}$$

Übung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^n$

Vorlesung $f'(x_0) = n \, x_0^{n-1}$ (mit Induktion, mit Produktregel)

Tipp: Binomischer Lehrsatz, dann geht es ohne!

Rechenregeln: f, g diffbar. Dann

(i) Linearität: $(af+bg)' = af' + bg'$

(ii) Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(iii) Quotientenregel: $g(x_0) \neq 0$ $\left(\Rightarrow g \neq 0 \text{ auf } (x_0-\delta, x_0+\delta) \right)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

(iv) Kettenregel: $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to I$ $\Rightarrow$ $f \circ g: J \to \mathbb{R}$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(\underline{g(x_0)}) \cdot g'(\underline{x_0})$$

~~Bsp~~ Übung: ((i), (ii) mit Prop)

(i) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Id ist diffbar auf $\mathbb{R}$, $(Id)'(x_0) = 1$

$\Rightarrow$ f_1 ist diffbar mit $f_1'(x_0) = (x \cdot x)'(x_0) = 1 \cdot x_0 + x_0 \cdot 1 = 2x_0$

(ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2+4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$

$g'(x_0) = 4x_0^3 + 16x_0$

$g = g_1 \circ g_2$, $g_1(x) = x^2$

$g_2(x) = x^2 + 4 \rightsquigarrow g_1'(x) = g_2'(x) = 2x$

$$g'(x_0) = g_1'(g_2(x_0)) \cdot g_2'(x_0) = 2 \cdot (x_0^2 + 4) \cdot 2x_0 = 4x_0(x_0^2+4) = 4x_0^3 + 16x_0$$

Falsch: $g'(x_0) = g_1'(x_0) \cdot g_2'(x_0) = 4x_0^2$

Konsequenz / Verfeinerung der Kettenregeln:

Satz: (Ableitung der Umkehrfunktion)

$f: I \to J$ stetig und bijektiv, diffbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f^{-1}: J \to I$ diffbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Übung: Bestimme die Ableitung von $\arccos: (-1,1) \to (0, \pi)$

$\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$, Ableitung ?

1.) $\arccos^{-1} = \cos$, $\cos$ diffbar

$\cos'(x) = -\sin(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))}$$

$$= \frac{1}{-\sin(\arccos(y))}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$

2.) Optimierung

Klassische Optimierungsprobleme:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben

~~Frage~~: Welche globale / lokalen Maxima / Minima bestimmen

Wissen bereits: Falls f stetig $\Rightarrow$ Existenz, aber wo?

Wir sagen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ hat in x_0 ein lokales (striktes) Maximum / Minimum, falls ein $\delta > 0$ ex. so, dass $\forall\ x \in \left((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \right) \cap [a,b]$:

$f(x) \leq f(x_0)$ $f(x) \geq f(x_0)$

$(<)$ $(>)$

lok. (striktes) Max.   lok. (striktes) Min.

Bem.: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, lokales Extremum in $x_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Folgerung Vorlesung: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Falls $f(x_0) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ $\quad (f(x_0) = \min f)$

dann gilt eines der Folgenden:

(i) $x_0 \in \{a,b\}$ (Randpunkte)

(ii) $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a,b)$ und f in x_0 diffbar

(iii) f in $x_0 \in (a,b)$ nicht diffbar

$\Big\}$ kritischer Punkt x_0

Nenne $K(f)$ die Menge der kritischen Punkte $\quad (K(f, [a,b]))$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ Max / Min müssen angenommen werden und die Stellen an denen das passiert in $\{a,b\} \cup K(f)$

Bsp: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar

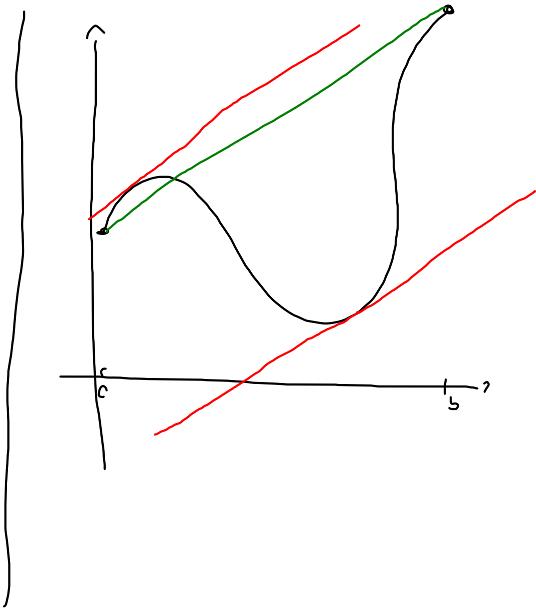
(i) ~~Falls~~ Falls $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow K(f) = \emptyset \Rightarrow$ Max / Min am Rand

(ii) Ang. Min oder Max nicht auf dem Rand angenommen wird.

$\Rightarrow$ Max / Min in (a,b) $\Rightarrow$ $\exists$ x_0 : $f'(x_0) = 0$

(Spezialfall: $f(a) = f(b)$ ~~mit~~ und nicht konstant)

$\Rightarrow$ Satz von Rolle



Mittelwertsatz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar.

Dann $\exists$ $\xi \in (a,b)$ so, dass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Sekantensteigung zwischen a und b

Tangentensteigung der Zwischenstelle

Bemerkungen:

(i) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, dann wird die Vor. vom Mittelwertsatz $\forall\ \tilde{a}, \tilde{b} \in (a,b)$ mit $\tilde{a} < \tilde{b}$ erfüllt

$$\left(f: [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}, \quad [\tilde{a}, \tilde{b}] \subseteq (a,b) \right)$$

(ii) Folgerung: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar

$$f \text{ monoton wachsend} \iff f' \geq 0$$

$$f \text{ monoton fallend} \iff f' \leq 0$$