Übersicht:

1.) höhere Ableitungen / stetige Diffbarkeit

2.) Satz von Taylor

3.) Pktw. und glm. Konvergenz von Funktionenfolgen

1.) höhere Ableitungen / stetige Diffbarkeit

Definition: $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar.
Dann heißt f 2-mal diffbar, falls f' diffbar. und schreiben f'' $\left((f')' \right)$.

Analog: Definieren wir die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f als $\left(f^{(n-1)}\right)'$, falls f $(n-1)$-mal diffbar ist und $f^{(n-1)}$ diffbar ist.

⌈ ∞-oft diffbar / glatt ⌋

Bem:
Falls f 2-mal diffbar, denn ist f stetig und diffbar, und f' stetig.

Definition: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar.
Dann nennen wir f stetig diffbar, falls f' stetig.

Analog nennen wir f n-mal stetig diffbar, falls ~~f~~ n-mal diffbar und $f^{(n)}$ stetig ist.
Wir nennen die Menge aller n-mal stetigen Fkt. auf einem Intervall I $C^n(I)$.

Bem:

$$C^n(I) \subseteq C^{n-1}(I) \subseteq \dots \subseteq C^2(I) \subseteq C^1(I) \subseteq C^0(I)$$

stetige Fkt.

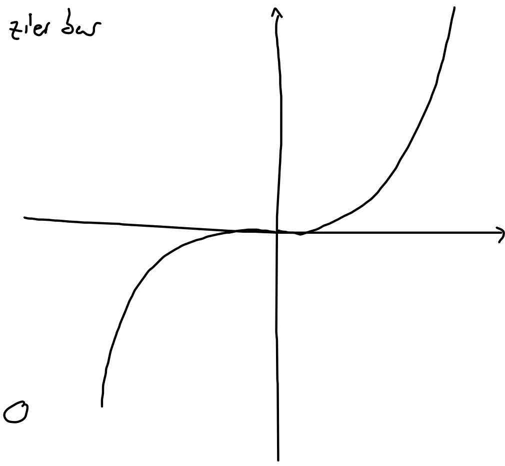
Übung:

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$

Wie oft ist f_1 (stetig) differenzierbar?

f_1 auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ glatt / ∞-oft diffbar / ∞-oft stetig differenzierbar

mit $f_1'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$



Was passiert in 0?

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$. Dann gilt

$$0 \leq \left| \frac{f_1(x_n) - f_1(0)}{x_n - 0} \right| = \left| \frac{f_1(x_n)}{x_n} \right| = \frac{|x_n|^2}{|x_n|} = |x_n| \longrightarrow 0$$

Sandwichlemma $\Rightarrow$ $\frac{f_1(x_n) - f_1(0)}{x_n - 0} \longrightarrow 0 \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$

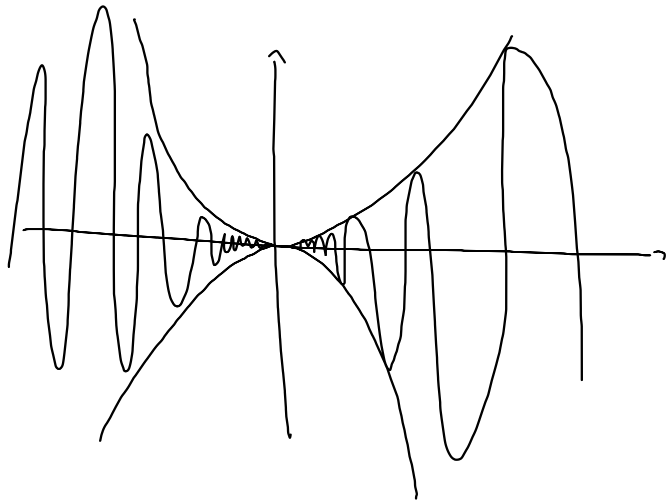
f_1 diffbar mit $f_1'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} = 2|x|$

$\Rightarrow f_1$ stetig diffbar, aber nicht 2-mal diffbar!

Übung:

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wie oft ist f_2 (stetig) diffbar?



Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_2 glatt mit

$$f_2'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Was ist mit 0:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$.

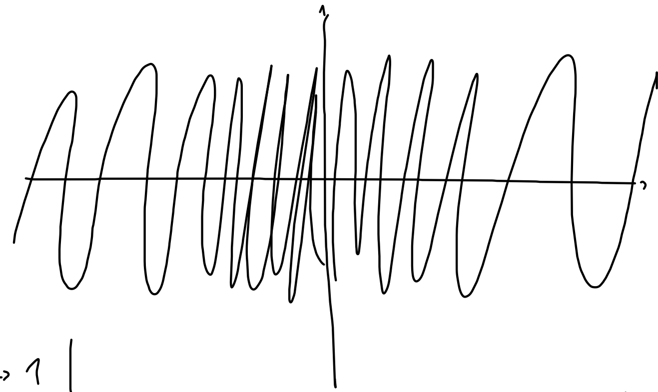
Erinnere: $\left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq 1$

$$0 \leq \left| \frac{f_2(x_n) - f_2(0)}{x_n - 0} \right| = \left| \frac{f_2(x_n)}{x_n} \right| = \left| \frac{x_n^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{x_n} \right| \leq \frac{|x_n|^2}{|x_n|} = |x_n| \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ f_2 ist diffbar in 0 mit $f_2'(0) = 0$

f_2 ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

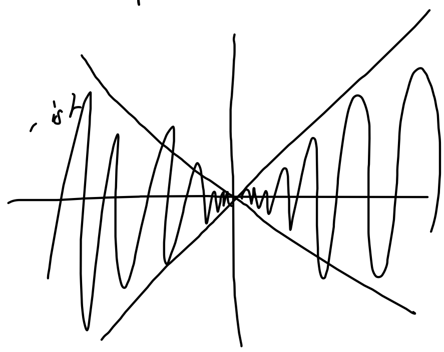


$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ unstetig in 0:

$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ und $\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \to 0$

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ und $\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

Da $2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig in 0 und $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht stetig in 0, ist $f_2'(x)$ nicht stetig in 0.



2.) Satz von Taylor .

Definition: Für eine n-mal diffbare Fkt definieren wir das Taylorpolynom in einem Entwicklungspunkt x_0 als

$$T_n^f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Satz: Falls $f \in C^{n+1}(I)$, $x_0 \in I$. Dann gilt

ξ Zwischenstelle zwischen x_0 und x.

$$f(x) = T_n^f(x, x_0) + R_n(x, x_0) \quad \text{mit} \quad R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Bem: Insbesondere $R_n(x, x_0) \in O(|x - x_0|^{n+1})$, d.h. $|R_n(x, x_0)| \leq C |x - x_0|^{n+1}$

Korollar: $f \in C^{(n)}(I)$, $x_0 \in I$. Dann

$$f(x) = T_n^f(x, x_0) + o(|x - x_0|^n)$$

[Erinnere: $g(x - x_0) \in o(|x - x_0|^n)$, falls $\frac{g(x - x_0)}{|x - x_0|^n} \to 0$ für $x \to x_0$]

Fazit: diffbar $\Rightarrow$ linear approximierbar

n-mal stetig diffbar $\xRightarrow{\text{Satz von Taylor}}$ polynomial approximierbar mit Polynom vom Grad n.

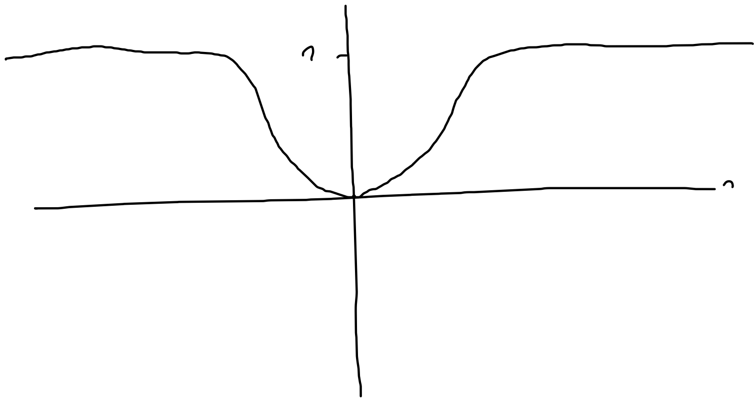
Für $f \in C^\infty(I)$ betrachte Taylorreihe bei x_0:

$$T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Fragen: – Konvergiert die Reihe? ~~Wo~~? Gegen f? (um x_0?)

Bsp: 1.) $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, $f^{(n)}(0) = n!$

$$T_f^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \underset{|x|<1}{=} \frac{1}{1-x} = f_1(x)$$



2.) $f_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f_2^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$T_{f_2}^{0} \equiv 0 \neq f_2(x) \quad \forall\, x \neq 0$

Satz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

Dann gilt:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius ρ

(ii) f diffbar auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$

(iii) $f \in C^{\infty}((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$ und

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Insb. ist f seine eigene Taylorreihe.

Bemerkung:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k - f(x_0)}{x - x_0} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k - f(x_0)}{x-x_0}$$

$\Gamma \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n} = \infty \neq 0 = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$

Satz: Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit

(i) f_n stetig diffbar, f stetig, $f_n \to f$ p.k.w.

(ii) $\exists\, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ so, dass $f_n' \to g$ glm.

Dann ist f diffbar mit $f' = g$.

Bsp: $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$

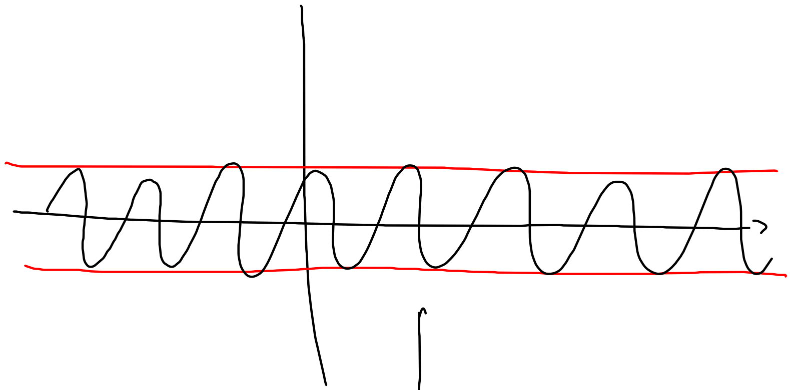
$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

z.z. $f_n \to 0$ glm.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (Satz von Eudoxus). Dann gilt $\forall\, n \geq n_0$, $\forall\, x \in (0,1)$

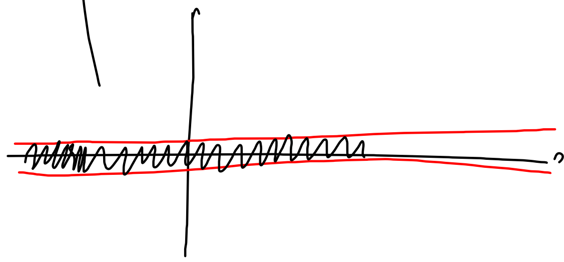
$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon .$$

$f_n' = \cos(nx)$.



$f_n = \frac{1}{n}\sin(nx) \longrightarrow f \equiv 0$

$f_n' = \cos(nx)$ $\qquad f' \equiv 0$



$x_n := \frac{\pi}{n}$ $\qquad$ n groß genug so, dass $\frac{\pi}{n} \in (0,1)$

$\Rightarrow f_n'(x_n) = \cancel{\frac{1}{n}} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) = -1 \not\to 0$