Übersicht: Integration

1.) Motivation / Treppenfkt

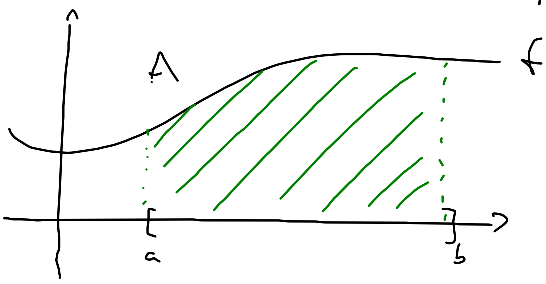
2.) Regelfkt.
   ↳ stetige Fkt.

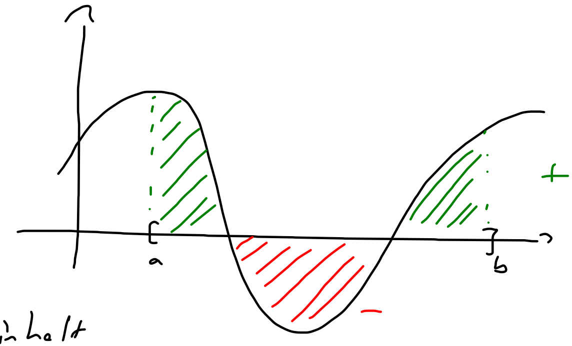
3.) Hauptsätze der Diffe.- und Integralrechnung

4.) Rechenregeln / Tricks

1.) Motivation / Treppenfkt.

Wollen Flächeninhalt unter Graphen einer Fkt.:





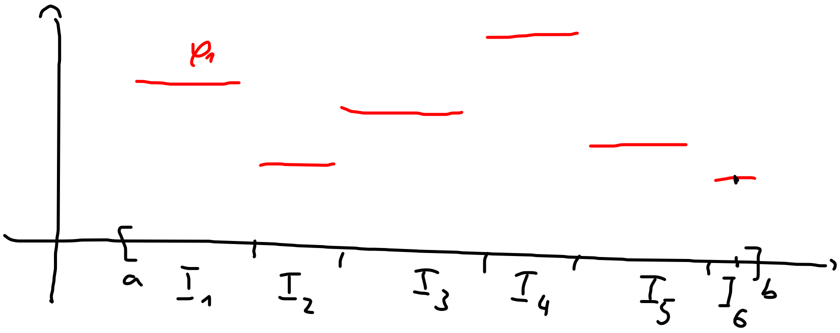
präziser: signierter Flächeninhalt

Formal: $\int_a^b f(x)\,dx = \text{Flächeninhalt}\big(\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \cancel{\quad}\ 0 \le y \le f(x)\}}_{=: A}\big)$

Idee: Führe Integration für einfache Fkt ein $\rightsquigarrow$ Treppenfkt.

Def: $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt., falls ein $K \in \mathbb{N}$ ex., und eine Aufteilung $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k := b$ und Konstanten $\varphi_1, \dots, \varphi_K \in \mathbb{R}$ geben, so dass

$$\varphi(x) = \varphi_k \quad \text{auf} \quad I_k := (x_{k-1}, x_k) \quad \forall 1 \le k \le K$$



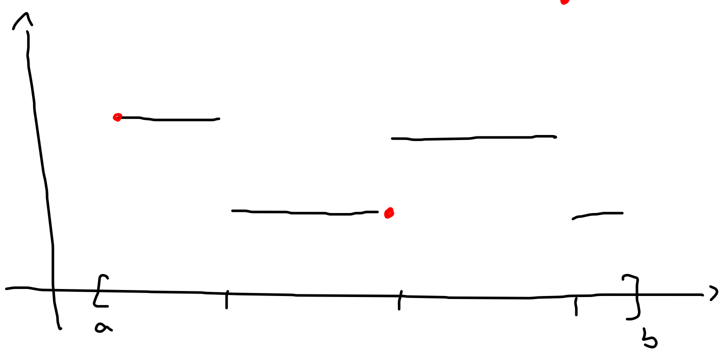
Bsp: Charakteristische Fkt. von offenen / abgeschlossenen Intervallen

$$\chi_{(\frac{1}{2},1)} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in (\frac{1}{2},1) \\ 0 & x \notin (\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

χ_A wohldefiniert. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, aber i. A. keine Treppenfkt z. B.
$\chi_{\mathbb{Q}}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$

Für eine bel. Treppenfkt φ gilt aber immer auf $[a,b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$:

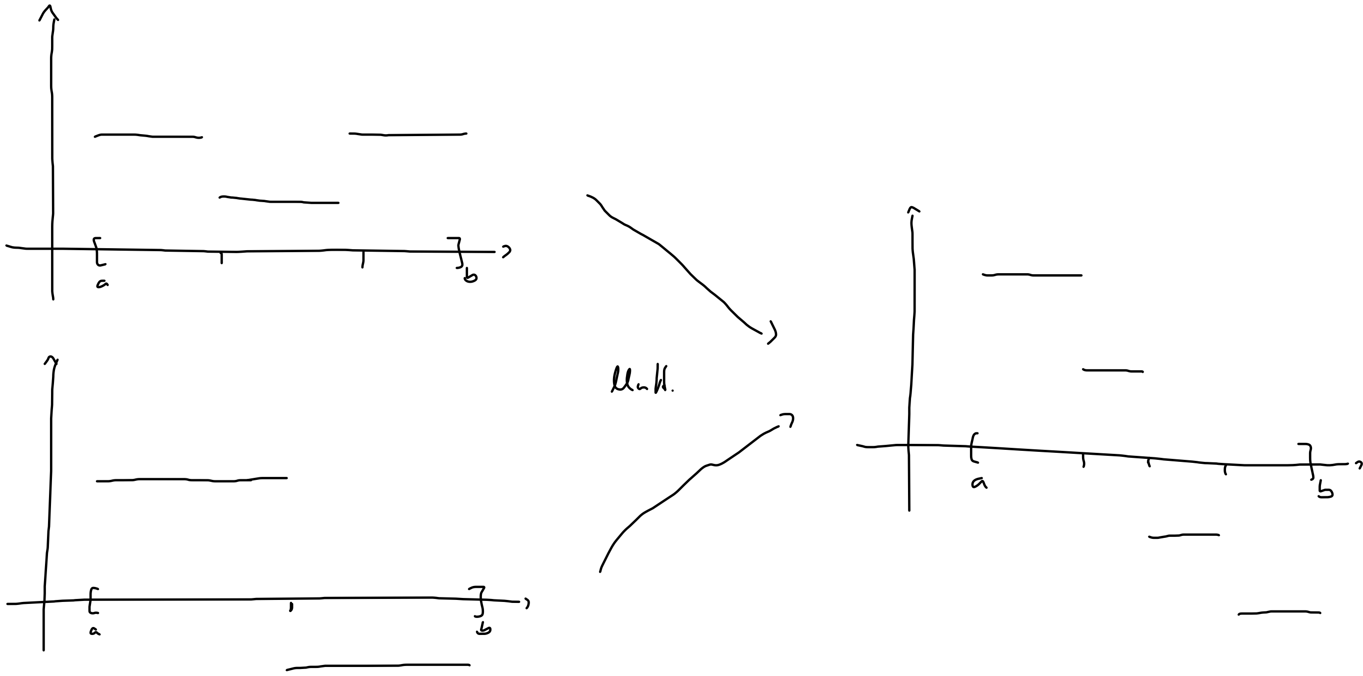
$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{K} \varphi_k \cdot \chi_{I_k}(x)$$



Rechenregeln: φ_1, φ_2 Treppenfkt, $c \in \mathbb{R}$. Dann

$\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2 \,,\, \varphi_1 \cdot \varphi_2}_{\text{Verfeinerung manchmal nötig}}$, $c \cdot \varphi_1$, $|\varphi_1|$ Treppenfkt.

Verfeinerung manchmal nötig: i.A. $K^1 \neq K^2$, $I_k^1 \neq I_k^2$



Definition: (Integral von Treppenfkt)

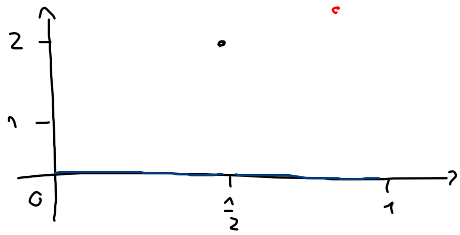
$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfkt. Dann def wir.

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} \varphi_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Fazit: Berechne (signierten) Flächeninhalt der Rechtecke mit Höhe φ_k und Breite $(x_k - x_{k-1})$, dann summiere.

Vernachlässige die Punkte $x_0, x_1, \dots, x_k$ da darunter kein Flächeninhalt.

Bsp: $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{2} \\ 2 & x = \frac{1}{2} \end{cases} = 2\chi_{\{\frac{1}{2}\}}$

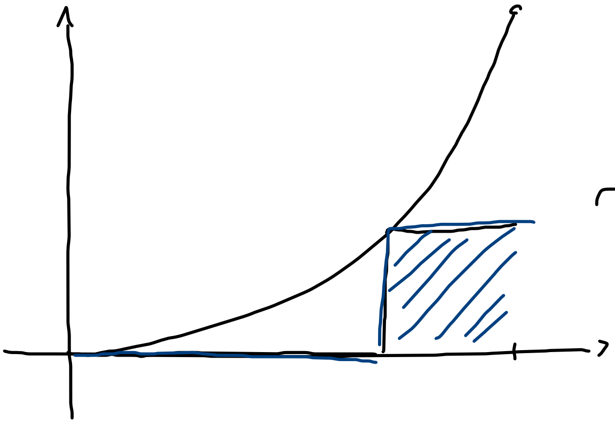


$$\int_0^1 \varphi = 0 \quad !$$

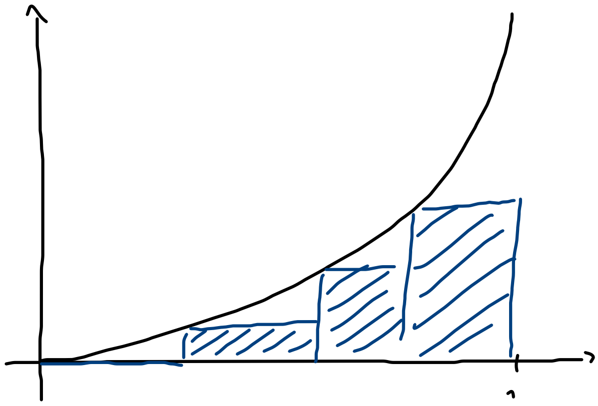
keine Fakultät

(Konsistent mit der Theorie von Riemann / Lebesgue)

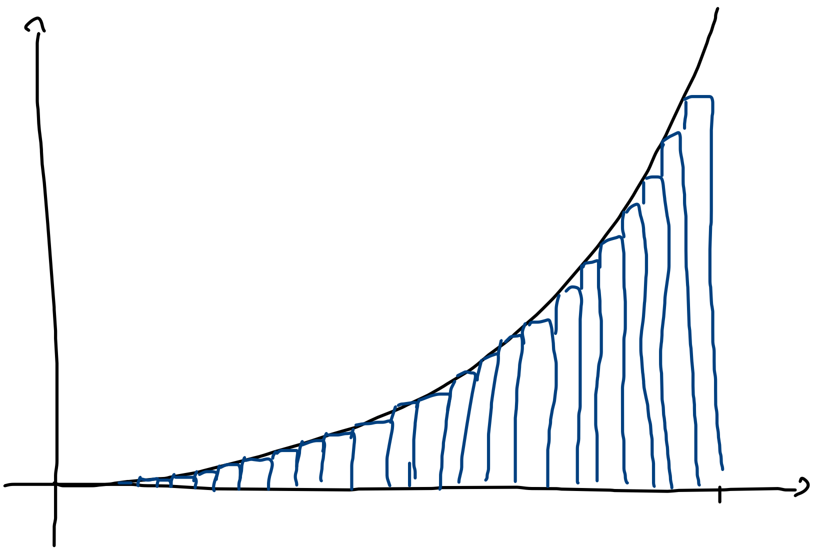
Idee für allg. Fkt: Approximation durch Treppenfkt.



$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow$ noch feiner $\rightsquigarrow$

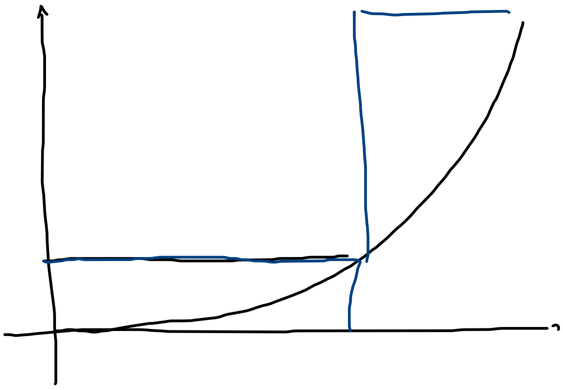
Definition: Wir nennen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt, falls eine Folge $\varphi_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ von Treppenfkt ex., mit $\varphi_n \to f$ glm.

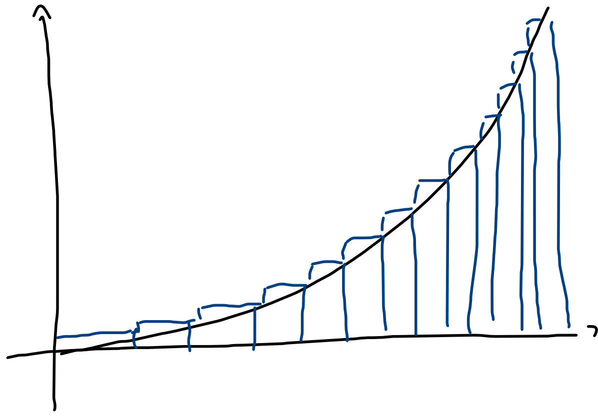
Dann definieren wir:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Grenzwert vertauscht mit Integral

und $\int_a^b f$ wohldefiniert (ex. immer und unabhängig von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$)





Bemerkung:

1.) monotone, (stückweise) stetige Fkt sind Regelfkt.

2.) Rechenregeln: f, g Regelfkt.

$$\int (f+g) = \int f + \int g \quad , \quad \int c\cdot f = c \cdot \int f \quad , \quad g \leq f \Rightarrow \int g \leq \int f$$

$$\int_a^a f = 0 \quad , \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|$$

3.) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt $\Rightarrow$ $\forall x \in (a,b]$ $\chi_{(a,x)} \cdot f$ Regelfkt $\left(\varphi_n \rightsquigarrow \chi_{(a,x)} \cdot \varphi_n \right)$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt := \int_a^b f(t) \cdot \chi_{(a,x)}(t)\, dt$$

Frage: Welche Eigenschaften hat F?

z.B. F stetig, diffbar?

3.) Hauptsätze der Diff= und Integralrechnung:

Definition: Für ein $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, heißt $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ „Stammfkt von f", falls F diffbar mit $F' = f$.

1.) Hauptsatz:

Für $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $F' = f$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

2.) Hauptsatz:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ eine Stammfkt von f

Bem: 1.) Falls F Stammfkt von f ist, so ist auch
$\tilde{F} := F + C$ Stammfkt (und alle Stammfkt haben diese Gestalt)

f stetig $\Rightarrow$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$ $\quad (C = F(a))$

2.) „Integration ist (bis auf Konstante) invers zur Ableitung"
(Süddeutschland: „Aufleiten")

3.) Insb. F stetig. Neue Möglichkeit:

Bsp: $F(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

ex. keine endliche Summendarstellung mit bekannten Fkt.

4) Rechenregeln + Tricks

Partielle Integration: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig, g stetig diffbar und F Stammfkt von f. Dann gilt

$$\int_a^b f\cdot g = \underbrace{[F\cdot g]_a^b}_{} - \int_a^b F\cdot g'$$

$$:= (F\cdot g)(b) - (F\cdot g)(a)$$

Substitutionsregel: Seien $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g: [c,d] \to [a,b]$ stetig diffbar

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(y)\, dy = \int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Korrekturterm der Durchlaufgeschw. festlegt.

Bsp: $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $g: [0,1] \to [0,2]$, $t \mapsto 2t$

$g' = 2$

$$\int_{g(0)}^{g(1)} f = \int_0^2 1 = 2 = \int_0^1 f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_0^1 1 \cdot 2 = 2$$

Bsp:

1.) $\int_a^t \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = [x \cdot \ln(x)] - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= [x \cdot \ln(x)] - \int 1\,dx$

$= [x \cdot \ln(x) - x]_a^t$

$\rightsquigarrow \quad F(x) = x \cdot \ln(x) - x + C \qquad (x \in (0, \infty))$

Bem: $F'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x)$

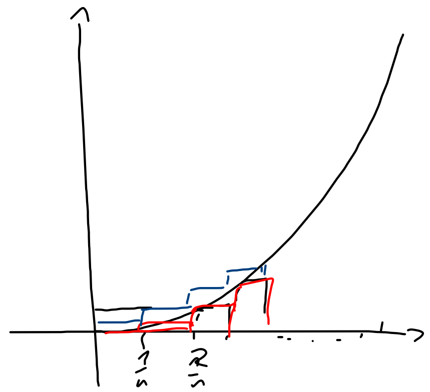
2.) $\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$

$(x^2)' = 2x \qquad u = x^2$

$\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u)\Big|_{u=x^2}$

$= \arctan(x^2)$

$\int_c^d f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y)\,dy$



$\varphi_n(x) := \frac{k^2}{n^2}$ auf $x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$

$x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$

(iii) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{1-\sin^2(x)} \frac{dx}{du} = \int \frac{1}{\cos}\,du$

$u = \arcsin$

$= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx$

Erinnere:

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$

$x \in (0,1)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right]$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

$x \in (0,1)$

$= \frac{1}{2}\,\frac{1+x+(1-x)}{1-x^2} = \frac{2}{2(1-x^2)}$

$= \frac{1}{1-x^2}$

(iv) $\int_{-1}^{1} \cos \cdot \sin$

(v) $\int_{-1}^{1} e^{x^2} \cdot x^3$

(vi) $\int e^{x} \cdot x^2$

(iv) Bh. $\int_{-1}^{1} \cos(x)\sin(x)\,dx = 0$

1. Möglichkeit.

Bestimme zunächst Stammfunktion

$\sin' = \cos$

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\sin(x)\,dx \underset{\text{Substitutionsregel}}{=} \int_{\sin(-1)}^{\sin(1)} u\,du = \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{\sin(-1)}^{\sin(1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(1)^2 - \sin(-1)^2\right)$$

$$= 0$$

sin Punktsymmetrisch um 0 /
ungerade

$$(\sin(x))^2 = (-\sin(x))^2 = \sin(x)^2$$

bzw. $\sin^2$ gerade $\sin^2(x) = \sin^2(-x)$

2.) Möglichkeit

cos gerade , $\cos(x) = \cos(-x)$

sin ungerade , $\sin(x) = -\sin(-x)$

$\Rightarrow$ cos · sin ungerade

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\sin(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \cos(x)\sin(x)\,dx + \int_{0}^{1} \cos(x)\sin(x)$$

$$\int_{-1}^{0} \cos(x)\sin(x)\,dx = +\int_{-1}^{0} \cos(-x)\cdot\sin(-x)\cdot(-1)\,dx \underset{\substack{(-x)'=-1 \\ \text{Substitutionsregel}}}{=} \int_{1}^{0} \cos(x)\sin(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{1} \cos(\tilde{x})\sin(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \cos(x)\sin(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{1} \cos(x)\sin(x)\,dx - \int_{0}^{1} \cos(\tilde{x})\sin(\tilde{x})\,d\tilde{x}}_{=} = 0$$

(v) Bef: $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\cdot x^3 dx = 0$

~~Rechnung~~

1.) Möglichkeit: Bestimme Stammfkt.

$$\int e^{x^2} x^3 dx = \frac{1}{2}\cdot \int (e^{x^2}\cdot x^2)\cdot (2x)\, dx$$

Substitution $\overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int e^u \cdot u \, du$

Partielle Integr. $= \frac{1}{2}[e^u u] - \int e^u \cdot 1 \, du$

$$= \frac{1}{2}[e^u u - e^u]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{x^2}\cdot x^2 - e^{x^2}]$$

Test: / Rechg

$$\left(\frac{1}{2}(e^{x^2}\cdot x^2 - e^{x^2})\right)' = \frac{1}{2}\left(2x\cdot x^2 \cdot e^{x^2} + 2x\cdot e^{x^2} - 2x e^{x^2}\right)$$

$$= x^3 e^{x^2} \quad \checkmark$$

Bemerke: $\left(\frac{1}{2}(e^{x^2}\cdot x^2 - e^{x^2})\right) = \left(\frac{1}{2}(e^{(-x)^2}(-x)^2 - e^{(-x)^2}\right)$

also gerade:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{x^2} x^3 dx = \frac{1}{2}\left((e^1\cdot 1 - 1) - (e^1\cdot 1 - 1)\right) = 0$$

2.) Möglichkeit:

$e^{x^2}\cdot x^3 = - e^{(-x)^2}\cdot(-x)^3$ also ungerade.

Wie zuvor folgt:

$$\int_{-1}^{0} e^{x^2} x^3 \, dx = - \int_{0}^{1} e^{x^2} x^3 dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{x^2}\cdot x^3 = 0$$

(vi) <u>Beh:</u> $\int e^x \cdot x^2 \, dx = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x$

<u>Rechnung:</u>

$$\int e^x \cdot x^2 \, dx \overset{\text{part. Integration}}{=} [e^x x^2] - \int e^x \, 2x$$

$$\overset{\text{part. I.}}{=} [e^x x^2] - [2xe^x] + \int e^x \, 2$$

$$= [e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x]$$

<u>Test/Rechnung:</u>

$$(e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x)' = e^x x^2 + 2xe^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$= x^2 e^x \quad \checkmark$$

<u>Sehr saubere/präzise Formulierung:</u>

<u>Beh:</u> Die Stammfkt von $x^2 e^x$ auf $\mathbb{R}$ sind gegeben durch

$e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis:</u>

Durch Nachrechnen (gegebenenfalls in der Regel hier nochmal ausführen) ergibt sich

$$(e^x \cdot x^2 - 2xe^x + 2e^x)' = e^x \cdot x^2.$$

Da Stammfkt eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt sind, folgt die Beh.

$\blacksquare$