Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/22
4.2.2022

Übungsklausur zur Analysis 1

Hinweise zur Klausur/zum Test: Nicht erlaubt ist das Heranziehen des Internets oder von Büchern, Skripten, Notizen von vor der Klausur/dem Test, Taschenrechnern oder mathe-fähiger Software. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass während der Klausur/des Tests die Kommunikation mit anderen Personen eine unerlaubte Verletzung der akademischen Integrität darstellt und schwerwiegende Konsequenzen haben kann. Zeichnungen müssen angemessen genau sein; z.B., wenn eine Kurve durch den Ursprung verläuft, dann sollte das aus der Zeichnung zu erkennen sein. Die Benutzung von Linealen ist erlaubt, aber nicht verlangt. Bearbeiten Sie alle Aufgaben. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Sie haben 125 Minuten Zeit. Den Stoff der Klausur/des Tests bilden das Skript und die Übungsblätter 1–12. Die Art der Aufgaben ist im Test (Studienleistung) dieselbe wie in der Klausur (Prüfungsleistung). Fakten, die in der Vorlesung oder in den Übungen bewiesen wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden, außer wenn es in der Aufgabenstellung anders verlangt ist. In der Klausur/im Test streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Bitte melden Sie sich zur Klausur/zum Test sowohl auf `urm.math.uni-tuebingen.de` als auch (wenn das für Sie möglich ist) auf `alma.uni-tuebingen.de` an. Falls Sie nicht teilnehmen oder nicht bestehen, können Sie an der Nachklausur/am Nachtest am Dienstag 29.03.2022 um 9:00 Uhr teilnehmen.

Hinweise zur Klausur für Präsenz-Teilnehmer (Studiengang B.Sc. Physik): Die Klausur findet am Freitag 18.02.2022 um 11:00 Uhr in den Hörsälen N3 (Nachnamen A-G) und N7 (Nachnamen H-Z) im Hörsaalzentrum Morgenstelle statt. Einlass ist um 10:45 Uhr. Zur Teilnahme ist erforderlich, dass Sie (a) keine Erkältungssymptome haben und (b) einen Nachweis über ein negatives Corona-Testergebnis von einer offiziellen Teststelle (nicht älter als 24 Stunden) oder über vollständige Corona-Impfung oder über Genesung von Covid vorzeigen können (3G). In den Uni-Gebäuden herrscht Maskenpflicht, Sie dürfen die Maske aber während der Klausur ablegen. Die Benutzung elektronischer Geräte ist während der Klausur nicht erlaubt; Sie schreiben auf Papier.

Hinweise zum Test für Online-Teilnehmer (Studiengänge B.Ed. Mathematik und B.Sc. Mathematik): Ihre Aufgaben sind randomisiert; d.h., von jeder Aufgabe gibt es mehrere Varianten, von denen Ihnen eine per Zufall zugeteilt wird. Ihr persönliches Aufgabenblatt können Sie ab 11:00 Uhr am Freitag 18.02.2022 als "Abgabe 20" von `urm.math.uni-tuebingen.de` herunterladen. Sie tragen auf dem Aufgabenblatt ein, um wieviel Uhr Sie die Bearbeitung begonnen und beendet haben. Falls Sie (z.B. aufgrund technischer Schwierigkeiten) erst verspätet mit der Bearbeitung beginnen konnten, endet Ihre Bearbeitungszeit entsprechend später. Sie dürfen mir Fragen zum Test als SMS an meine Mobilnummer 0178-8718191 stellen; Emails werde ich während des Tests nicht lesen können. Sie dürfen elektronische Geräte als Schreibgeräte verwenden oder auf Papier schreiben und Ihre Lösung einscannen oder fotografieren. Sie laden Ihre Lösung als 1 PDF-Datei als "Abgabe 21" auf `urm.math.uni-tuebingen.de` hoch. Die Zeit zum Scannen und Hochladen zählt nicht in die Bearbeitungszeit. URM registriert den Zeitpunkt der Abgabe; sollte sich Ihre Abgabe erheblich (> 20 Minuten) verzögern, sagen Sie mir bitte per SMS oder Email bescheid, damit ich weiß, was los ist.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Diese Aufgaben werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur/der echte Test. Ausgewählte Aufgaben werden im Repetitorium am 11.2.2022 besprochen.

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (6 Punkte)

Zeichnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = i$ in die komplexe Ebene ein. (Sie dürfen alle Methoden und Argumente benutzen, die Sie kennen.)

Aufgabe 2: Unbestimmtes Integral (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \ln(xe^x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}+1}\,dx$

Aufgabe 3: Folgenkonvergenz (6 Punkte)

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Folge konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert: $x_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n+2}$.

Aufgabe 4: Rekursionsfolge (8 Punkte)

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$. Entscheiden Sie, ob a_n konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. (12 Punkte)

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für Abbildungen $f : X \to Y$ und Teilmengen A, B von X.

(b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Ist $g \circ f$ injektiv, dann sind es auch f und g.

(c) Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide monoton fallend, dann ist es auch $f \circ g$.

Aufgabe 6: Reihen (9 Punkte)

Konvergent oder divergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Aufgabe 7: Potenzreihen (9 Punkte)

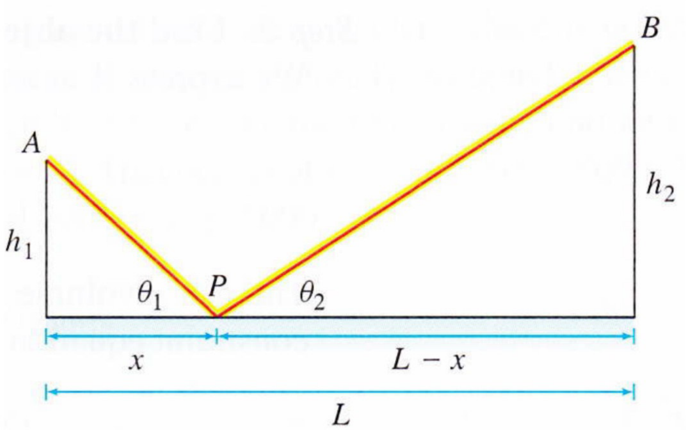
Bestimmen Sie jeweils, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe konvergiert.

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

Aufgabe 8: Optimierung (10 Punkte)



Ein Lichtstrahl, vom Punkt A kommend, wird von einem Spiegel reflektiert und erreicht den Punkt B. Gegeben seien $h_1 > 0, h_2 > 0$ und $L > 0$. Zeigen Sie das Heronsche Prinzip: Unter allen Punkten P des Spiegels hat der zurückgelegte Weg APB die kürzeste Länge für denjenigen Punkt, an dem $\theta_1 = \theta_2$. (Dies ist der Punkt, durch den der Lichtstrahl tatsächlich verläuft.)

Aufgabe 9: Grenzwerte von Funktionen (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Begründung die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

Aufgabe 10: Taylor-Entwicklung (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen. (Anstatt alle Ableitungen auszurechnen, benutzen Sie bekannte Taylor-Entwicklungen.)

(a) $f_1(x) = x \sin(x^2)$

(b) $f_2(x) = \ln(1 - x^2)$

Aufgabe 11: Beweis (8 Punkte)

Zeigen Sie: Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so erfüllt sie die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

für eine geeignete Konstante $L > 0$.

Aufgabe 12: Beweis (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Wenn eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikte lokale Minima bei x_1 und $x_2 > x_1$ hat, dann hat f ein lokales Maximum an einer Stelle $\xi \in (x_1, x_2)$.

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass das lokale Maximum bei ξ nicht strikt sein muss. (Das Beispiel kann durch eine Zeichnung oder verbale Beschreibung statt einer Formel gegeben werden.)

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage (a) nicht mehr allgemein stimmt, wenn man die Voraussetzung "stetig" fallen lässt.

—**ENDE**—

A 10

(a) $f_1(x) = x \sin(x^2)$

Erinnere:
$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{konv. (absl.) auf ganz } \mathbb{R}$$

$$f_1(x) = x \cdot \sin(x^2) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad T_0^f(x) = f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!} \quad (\text{um } 0)$$

(b) $f_2(x) = \ln(1-x^2)$

$$(-1)^{2n-1} = (-1)$$

$$\underbrace{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n}_{=(-1)^{2n-1}} \cdot x^{2n}$$

<u>Erinnere:</u> Für $y \in (-1,1)$ gilt

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cancel{x}^n}{n}$$

$$f_2(x) = \ln(1-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x^2)^n}{n} = +\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{x^{2n}}{n}$$

$x \in (-1,1) \Rightarrow x^2 \in (-1,1)$

$$\Rightarrow \quad T_0^{f_2}(x) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{x^{2n}}{n} \quad \text{um } 0 \text{ auf } (-1,1).$$

$$f_2'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = (-2x) \cdot \frac{1}{1-x^2} = (-2x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{-2x^{2n+1}}_{-\frac{x^{2n+2}}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{2n}}{n} \quad \text{mit Konvergenz auf } (-1,1)$$

$$f_2'(x) = \tilde{f}'(x) \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = \tilde{f}(x) + C$$

$$\overset{f_2(0) = \tilde{f}(0)}{\Rightarrow} \quad f_2(x) = \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^{2n}}{n}$$

A1: Wollen alle Lösungen von $z^2 = i$ für $z \in \mathbb{C}$.

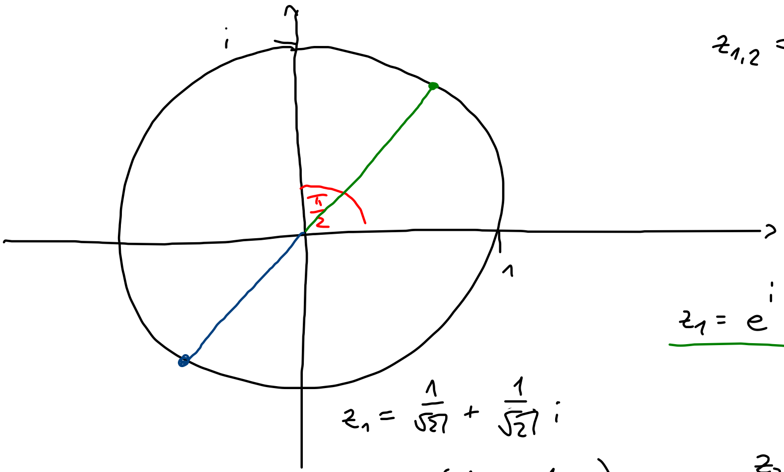
(und graphische Darstellung)

Fundamentalsatz Algebra

$z^2 - i = 0 \Rightarrow \exists$ max 2 verschiedene Lösungen z_1, z_2

$z_j^2 = i \qquad \{ j = 1, 2 \}$

$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad (|i| = 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \})$



$z_{1,2} = e^{i\varphi_{1/2}}$ $\qquad \boxed{\varphi \in (-\pi, \pi]}$

$$z_1^2 = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i2\varphi_1}$$

$$z_2^2 = e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i2\varphi_2}$$

$2\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

$\underline{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}}$ $\qquad z_2 = e^{-i\frac{3}{4}\pi}$,

denn

$$z_2^2 = e^{-i(\frac{3}{4} + \frac{3}{4})\pi} = e^{-i\frac{3}{2}\pi} = e^{i2\pi - i\frac{3}{2}\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$z_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$

Aufgabe 4: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$

Beh: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konv.

Beweis:

Zeige zunächst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert ist, d.h.

$$1 + a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zeige genauer: $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, insb. $1 + a_n \geq 1 > 0$

mit vollst. Induktion

IA: $n=1$ $\quad a_1 = 1 \geq 0$

IV: Nehme an, dass $a_n \geq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$

IS: $n \to n+1$

IV: $a_n \geq 0 \implies a_n + 1 \geq 1 > 0$

$$a_{n+1} = \ln(a_n + 1) \overset{a_n \geq 0}{\underset{\ln \text{ monoton}}{\geq}} \ln(1) = 0$$

Insb. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch 0 beschränkt.

z.z. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

[$a_1 = 1$, $a_2 = \ln(1+a_1) = \ln(2)$, da $2 < e$, ln streng strikt monoton

$\Rightarrow a_2 < \ln(e) = 1 = a_1$

$a_3 = \ln(1+\ln(2)) < \ln(1+1) = \ln(2) = a_2$, ...]

3. Möglichkeiten:

1.) Direkt nachrechnen über vollst. Induktion

z.z. $a_n \leq a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

IA: $n = 2$

$a_2 = \ln(1+1) = \ln(2) < 1 = a_1$ ✓

IV: Es gelte $a_n \leq a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$,

IS: $n \to n+1$

$$a_n - a_{n+1} = \ln(1+a_{n-1}) - \ln(1+a_n) = \ln\left(\frac{1+a_{n-1}}{1+a_n}\right) \overset{\text{I.V.}}{\geq} \ln(1) = 0$$

2.)

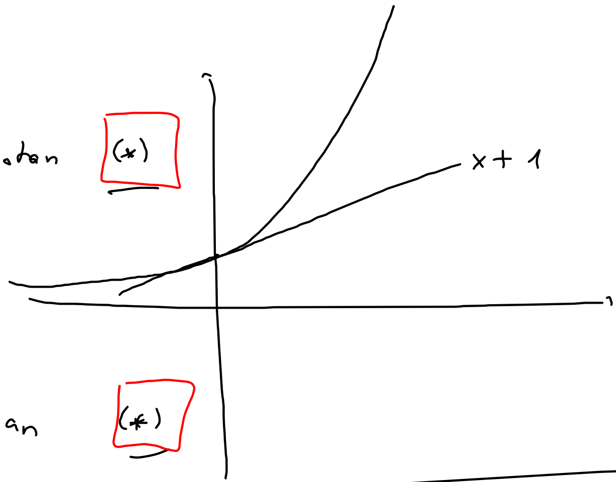
$$a_{n+1} \le a_n \quad \Longleftarrow \quad \ln(1+a_n) \le a_n$$

$$\overset{e \text{ monoton}}{\Longleftarrow} \quad 1 + a_n \le e^{a_n}$$

$$e^{a_n} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{a_n}{k}\right)^k \quad \text{mit} \quad \left(1+\frac{a_n}{k}\right)^k \ \underset{a>0}{\underline{(\text{streng})}} \ \text{monoton} \quad \boxed{(*)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{a_n} \overset{>}{\ge} 1 + a_n \qquad (k=1)$$

$$a_n \ge 0$$



3.) Wissen $a_n \ge 0$

$$e^{a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n)^k}{k!} = 1 + a_n + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a_n)^k}{k!}}_{a_n^k \overset{>}{\ge} 0 \ \forall k \ge 2} \overset{>}{\ge} 1 + a_n \quad \boxed{(*)}$$

(a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt

$$\Rightarrow \quad 0 \le a_n \le a_1 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

monoton + beschränkt

$$\Rightarrow \quad \exists \ a \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

$$(a \ge 0)$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n)$$

$$\overset{?}{=} \ln(1+a) \quad \text{ln stetig}$$

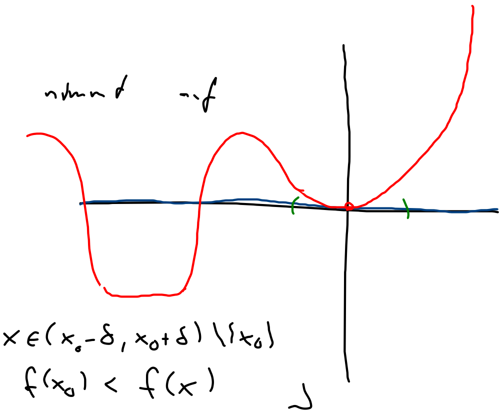
$$\Longleftrightarrow \quad e^a = 1 + a$$

Siehe $\boxed{(*)}$ $\Rightarrow$ $a = 0$ einzige Lösung von $e^a = 1 + a$

$\boxed{A12}$

Beh (c): Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und habe strikte lokale Minima x_1, $x_2 > x_1$. Dann besitzt f ein lok. Maximum bei einer Zwischenstelle $\xi \in (x_1, x_2)$.

Beweis:



Da $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, ist insb. $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ stetig, und nimmt auf $[x_1, x_2]$ ein globales Maximum / Minimum an.
auf $[x_1, x_2]$

insb. hat f im $[x_1, x_2]$ ein lokales Maximum.

Falls f ein striktes lok. Minimum in $x_0 \in \mathbb{R}$ hat, so ex. $\delta > 0$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$
$\Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Da x_1, x_2 strikte lok. Minima von f auf $\mathbb{R}$ sind, ex. $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in (x_1, x_2)$
$(\tilde{x}_1 \in (x_1, x_1 + \delta), \tilde{x}_2 \in (x_2 - \delta, x_2))$

mit $f(x_1) < f(\tilde{x}_1)$, $f(x_2) < f(\tilde{x}_2)$

$\Rightarrow$ f nimmt auf $[x_1, x_2]$ sein Max. nicht am Rand (d.h. nicht bei x_1, x_2) an.

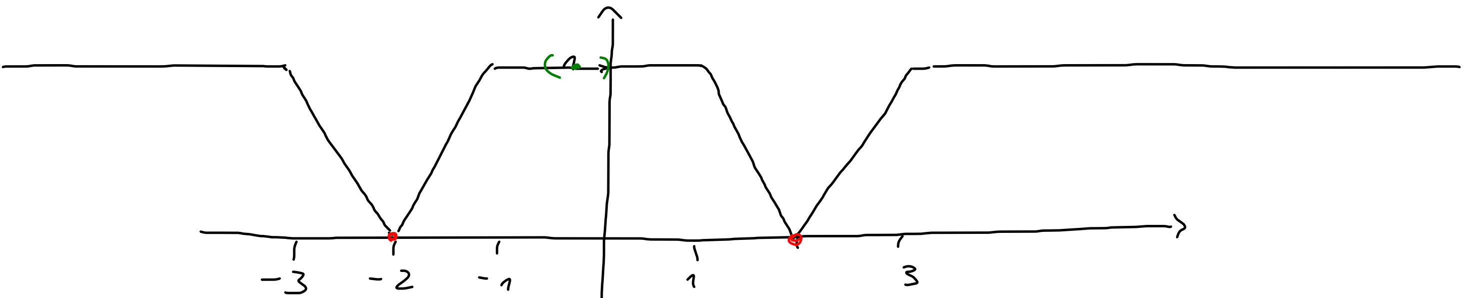
$\Rightarrow$ Da aber ein Max. ex., ex. $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$f(\xi) = \max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$$

Insb. ξ ein lok. Max von f auf $\mathbb{R}$ $\blacksquare$

(b)

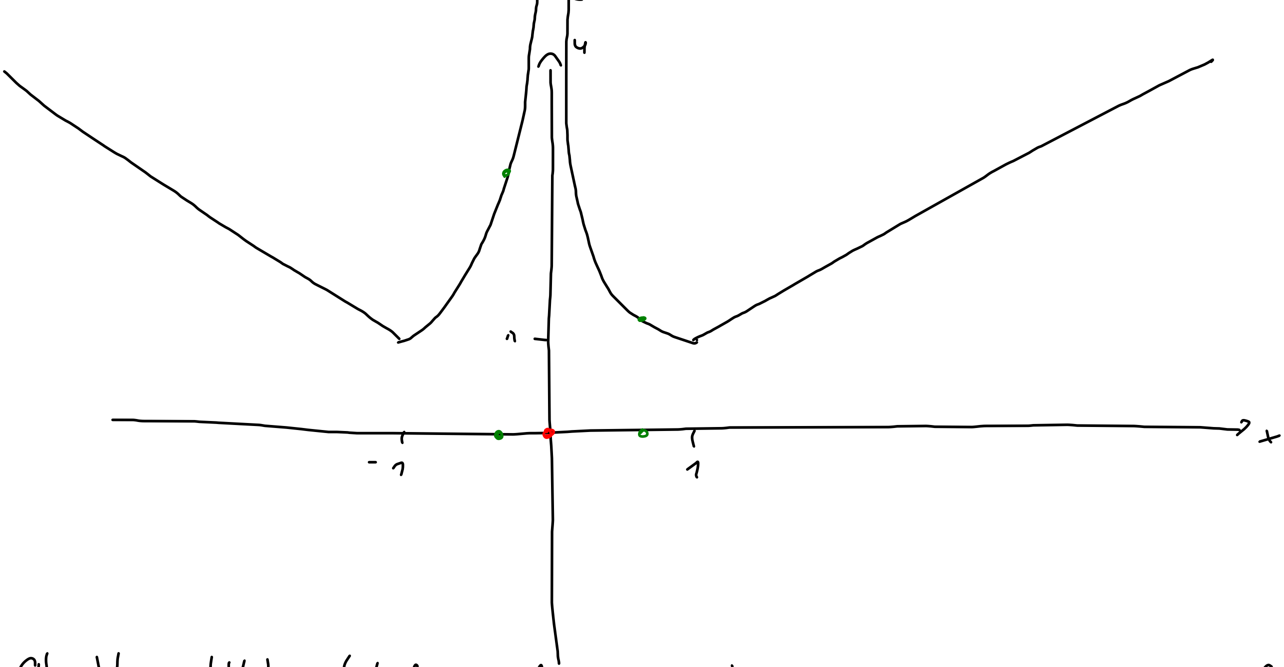
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \cup (-\infty,-3] \cup [3,\infty) \\ 2-|x| & x \in [-2,-1) \cup (1,2] \\ |x|-2 & x \in (-3,-2) \cup (2,3) \end{cases}$$



strikte (lokale) Minima bei -2 und 2, aber Max nicht strikt, da 1 maximaler Fkt-wert.

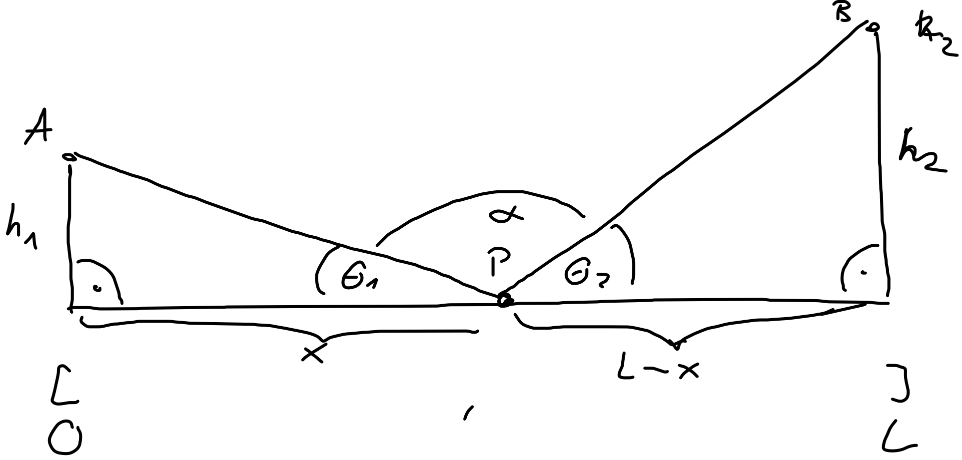
c)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x| & , x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{1}{|x|} & , x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Obwohl striktes, lokales Minimum bei $-1, 1$, hat f kein lokales Maximum auf $(-1, 1)$.

A8



Beh.: Strecke APB wird am Kürzesten für $\theta_1 = \theta_2$.

Beweis:

Die Länge der Strecke AP und PB ist gegeben durch

$$L_A = \sqrt{h_1^2 + x^2} \quad \text{und} \quad L_B = \sqrt{h_2^2 + (L-x)^2}.$$

wir untersuchen die Extremstellen / Maxima / Minima von

$$f: [0,L] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (L-x)^2}.$$

$f : [0,L] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (L-x)^2}$

Da f stetig ex. Minimum (Maximum). und f ist auf $(0,L)$ diffbar mit

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{(L-x)}{\sqrt{h_2^2 + (L-x)^2}}$$

Dann gilt:

$$f'(x) = 0 \iff 0 = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{(L-x)}{\sqrt{h_2^2+(L-x)^2}} = \frac{x\sqrt{h_2^2+(L-x)^2} - (L-x)\sqrt{h_1^2+x^2}}{\sqrt{h_1^2+x^2}\cdot\sqrt{h_2^2+(L-x)^2}}$$

$$\iff x\sqrt{h_2^2 + (L-x)^2} = (L-x)\sqrt{h_1^2+x^2}$$

$$\overset{\geq 0}{\iff} x^2\left(h_2^2 + (L-x)^2\right) = (L-x)^2\left(h_1^2 + x^2\right)$$

$$\iff (h_2^2 - h_1^2)x^2 + 2h_1^2 Lx - L^2 h_1^2 = 0$$

1.) Fall $h_1 \neq h_2$

Löse mit Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-2h_1^2 L \pm \sqrt{4h_1^4 L^2 + 4L^2 h_1^2 (h_2^2 - h_1^2)}}{2(h_2^2 - h_1^2)}$$

$$=$$

$$= \frac{h_1 L(\pm h_2 - h_1)}{(h_2^2 - h_1^2)}$$

$$x_1 = \frac{h_1 L}{h_1 - h_2} \qquad 0 < x_2 = \frac{h_1 L}{h_1 + h_2} < L$$

Aber für x_1 gilt: $h_2 > h_1 \Rightarrow x_1 < 0$

$h_1 > h_2 \Rightarrow x_1 > L$

In $(0, L)$ haben wir für $h_1 \neq h_2$ nur eine Extremstelle $x_0 = \frac{h_1 L}{h_1 + h_2}$

2.) Fall $h_1 = h_2$

$$2h_1^2 x - L^2 h_1^2 = 0 \iff x = \frac{L}{2} = \frac{h_1 L}{h_1 + h_2}$$

$\overset{?}{=}$ f nimmt bei $x_0 = \frac{h_1 L}{h_1+h_2}$ sein Minimum an.

Gilt, falls $f(x_0) < \min(f(0), f(L))$

$$f(0) = h_1 + \sqrt{h_2^2 + L^2} \quad , \quad f(L) = h_2 + \sqrt{h_1^2 + L^2}$$

$$x_0 = \frac{h_1 L}{h_1+h_2} \qquad L - x_0 = \frac{h_2 L}{h_1+h_2}$$

$$f(x_0) = \sqrt{h_1^2 + \frac{h_1^2 L^2}{(h_1+h_2)^2}} + \sqrt{h_2^2 + \frac{h_2^2 L^2}{(h_1+h_2)^2}}$$

$$= \frac{h_1}{h_1+h_2}\sqrt{(h_1+h_2)^2 + L^2} + \frac{h_2}{h_1+h_2}\sqrt{(h_1+h_2)^2 + L^2}$$

$$= \sqrt{(h_1+h_2)^2 + L^2}$$

Anf $f^2(x_0) < f(L)^2$

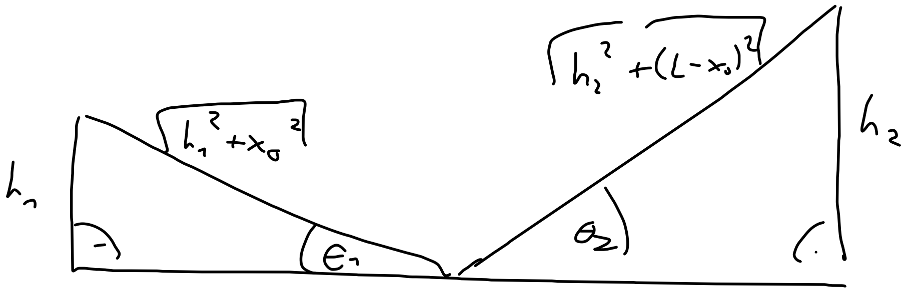
$$f(x_0)^2 = (h_1+h_2)^2 + L^2 = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 + L^2$$

$$< h_1^2 + 2h_1\sqrt{h_2^2+L^2} + (h_2^2 + L^2)$$

$$= \left(h_1 + \sqrt{h_2^2 + L^2}\right)^2 = f(0)^2$$

$\Rightarrow$ Minimum wird nicht am Rand angenommen

$\Rightarrow$ f nimmt bei x_0 sein Minimum an.



$\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(\theta_1(x_0)) = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \dots = \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{(h_1+h_2)^2 + L^2}}$$

$$\sin(\theta_2(x_0)) = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + (L-x_0)^2}} = \dots = \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{(h_1+h_2)^2 + L^2}}$$

$\Rightarrow \quad \sin(\theta_1(x_0)) = \sin(\theta_2(x_0))$

sin auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv

$\Rightarrow \quad \theta_1(x_0) = \theta_2(x_0)$

$\blacksquare$

A2:

(a) $$\int \ln(xe^x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x)\cdot x + C$$

(b) $$\int e^{\sqrt{x}+1}\,dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}+1} - 2e^{\sqrt{x}+1} + C$$

A3:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n+2} = e^4$$

$\boxed{A5}$

(a) Falsch

(b) Falsch

(c) Falsch

$\boxed{A6}$

(a) konvergiert

(b) konvergiert

(c) divergiert

$\boxed{A7}$

(a) Konv. für $x = 0$

(b) Konv. $\forall x \in (-1, 1)$

(c) Konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{A9}$

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = 1$

(b) $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = 0$