Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
1.12.2021

Analysis 1: freiwilliges Übungsblatt

Die Bearbeitung dieses Blattes ist vollkommen **freiwillig**. Die folgenden Aufgaben müssen weder in ihrer Gänze, noch in einer bestimmten Reihenfolge bearbeitet werden und sind lediglich ein Angebot das bereits Gelernte zu wiederholen und zu vertiefen.
Eine ausführliche Besprechung der Aufgaben ist nicht geplant, stattdessen wird nach der Weihnachtspause eine handschriftliche Lösung zur Verfügung stehen.
Das Blatt kann natürlich auch in Hinblick auf die Vorbereitung zur Klausur genutzt werden. Beachten Sie dabei bitte die Einstufung der Schwierigkeit (normal, mittel, schwer). Normale Aufgaben bzw. einzelne Teilaufgaben können in diesem Umfang in der Klausur vorkommmen. Mittlere Aufgaben bzw. einzelne Teilaufgaben (sofern nicht allzu schreibaufwändig) können in diesem Umfang als etwas schwierigere Aufgaben in der Klausur vorkommen. Schwere Aufgaben sind zu umfangreich, als dass sie in einer Klausur gestellt werden könnten. Sie dienen ausschließlich als Knobelaufgabe.

Aufgabe 1: Kurze Beweise (normal)

Beweisen oder widerlegen (mit Gegenbeispiel) Sie folgende Aussagen:

a) Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl

b) Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}$ und M_2 beschränkt. Dann ist M_1 beschränkt mit $\sup M_1 \leq \sup M_2$.

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x genau dann, wenn $\forall \varepsilon \geq 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x| \leq \varepsilon$

d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x| \leq \varepsilon$

e) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x genau dann, wenn $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$

f) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

g) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent. Dann konvergiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

h) Seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt mit $\sup f := \sup f([0,1])$, dass $\sup(f+g) = \sup f + \sup g$.

i) Seien $f, f_1, f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, sei f stetig und es gelte $f = f_1 + f_2$. Dann sind f_1, f_2 stetig.

j) Seien $f, f_1, f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, sei f, f_2 stetig und es gelte $f = f_1 + f_2$. Dann ist f_1 stetig.

Aufgabe 2: Abbildungen und Mengenlehre(normal)

Seien N, M Mengen und $f\colon N \to M$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen zwischen Mengen:

a) Für eine Teilmenge $B \subset X$ einer Menge X definieren wir das Komplement B^C (in X) als $B^C := (X \setminus B)$. Dann gilt für alle $B \subset M$

$$f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C.$$

b) Für Teilmengen $A, B \subset N$ gilt

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Kann man im Allgemeinen Gleichheit erwarten?

Aufgabe 3: Vollständige Induktion (normal)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

b) $\forall n \geq 2$ gilt $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n!}$.

c) Für $a, b > 0$ und $\forall n \geq 2$ gilt $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

Aufgabe 4: Folgenkonvergenz (normal)

Entscheiden Sie ob die folgenden Folgen konvergieren oder divergieren, und bestimmen sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n := \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) n$,

b) $b_n := \sqrt[4]{n^4 + 2n} - n$,

c) $c_n := \frac{(n+2)^2(n-1)}{3n^2+16n+100}$,

d) $d_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$.

Aufgabe 5: Vollständigkeit der reellen Zahlen (mittel)

Nehmen wir den Satz von Archimedes als gegeben an, so haben wir drei äquivalente Formulierungen für die Vollständigkeit der reellen Zahlen:

(i) Jede nicht-leere, beschränkte Menge besitzt ein Supremum,

(ii) Jede Intervallschachtelung besitzt einen einelementigen Kern, d.h. es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(iii) Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$.

In der Vorlesung wurde bereits $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ gezeigt. Vervollständigen Sie den Beweis, in dem sie auch $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ zeigen.

Aufgabe 6: Links- und Rechts-Inverse (mittel)

Seien X, Y nicht-leere Mengen und f eine Abbildung $f : X \to Y$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv, wenn sie eine Links-Inverse besitzt, d.h., es gibt ein $g : Y \to X$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn sie eine Rechts-Inverse besitzt, d.h., es gibt ein $h : Y \to X$ mit $f(h(y)) = y$ für alle $y \in Y$.

Sind Rechts- und Linksinverse im Allgemeinen eindeutig bestimmt?

Aufgabe 7: Der Betrag von stetigen Abbildungen (mittel)

Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $f(x) \neq 0$ für ein $x \in (a, b)$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ und $f(y) \cdot f(x) > 0$ für alle $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

(ii) Die Abbildungen $f_+, f_-\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert über

$$f_+ := \max(f, 0),\ \ f_- := \max(-f, 0),$$

sind stetig.

(iii) $|f| : (a, b) \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$ ist stetig.

Aufgabe 8: Stetigkeit auf den irrationalen Zahlen (schwer)
Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ für teilerfremde } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f genau auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. (Zeigen sie zunächst per vollständiger Induktion über m, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_{x,m} := (x-1, x+1) \cap \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd }, q \leq m\}$$

endlich ist.)

Aufgabe 9: Komplexe Nullstellen von reellen Polynomen (mittel)
Sei p ein Polynom mit reellwertigen Koeffizienten, d.h. $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ für $a_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass falls $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von p ist, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p.

Aufgabe 10: Reihenkonvergenz (normal)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1+\frac{1}{n})^n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+1} - n$.

Frohe Feiertage!