Termin-ID: NTIwODIy

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 02.11.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Satz: $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ X ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: "$\Leftarrow$" Sei X beschränkt und abgeschlossen.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ nach Bolzano-Weierstraß hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Da X abgeschlossen ist liegt der Limes der Teilfolge in X. $\square$

Bsp.: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen.

$$\|\alpha - \beta\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n - b_n|\} \qquad \alpha = (a_1, a_2 \ldots\ ) \quad \beta = (b_1, b_2 \ldots\ )$$

$$\Uparrow$$

$$\|\alpha\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a_n|\}$$

(Überprüfung der Normeigenschaft ist geradlinig ...)

Sei $X \subset \mathcal{F}$: $\quad \alpha \in X :\Leftrightarrow \|\alpha\|_\infty \leq 1$.

X ist offensichtlich beschränkt.

X ist auch abgeschlossen

Sei $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge die bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert.

$\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \beta$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\beta^n| \leq 1$ warum?

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig $\beta^n = \lim_{j\to\infty} \alpha_j^n$ $\left(|\beta^n - \alpha_j^n| \leq \sup_j \{|\beta^n - \alpha_j^n|\} \right)$

$|\alpha_j^n| \leq 1$ für alle j, n. $\Rightarrow$ $|\beta^n| \leq 1$.

$\Rightarrow$ $\sup |\beta^n| \leq 1$.

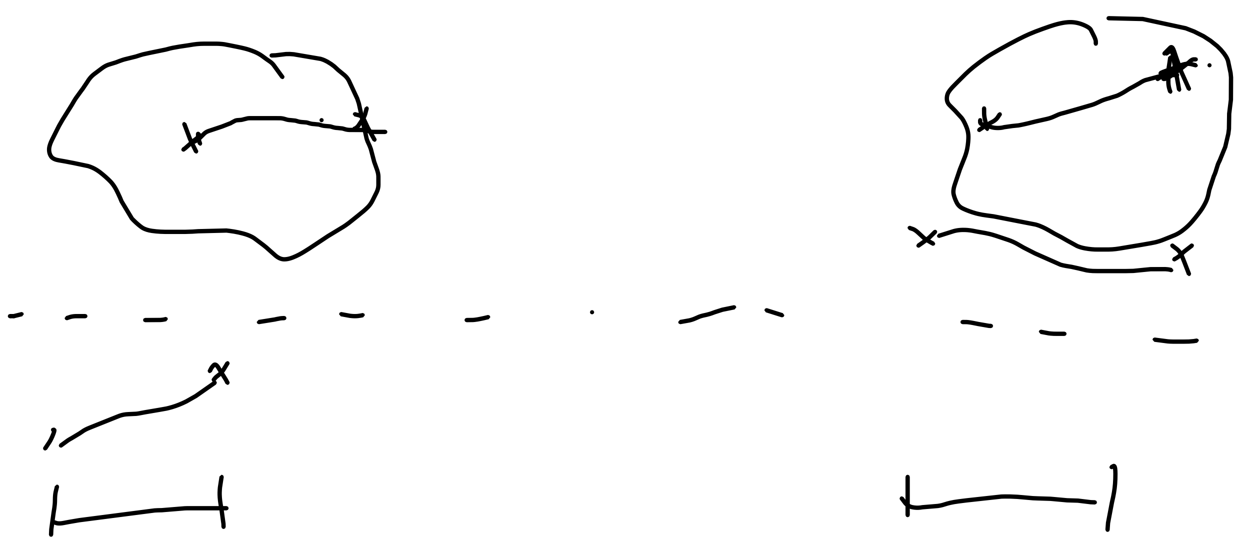
Betrachte $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ $:\Leftrightarrow$ $\alpha_j^j = 1$

$\alpha_j^n = 0$ falls $j \neq n$.

$\|\alpha_j - \alpha_k\|_\infty = 1$ fall $j \neq k$

Man findet keine Teilfolge, die konvergiert.

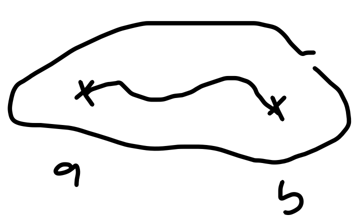
$\Rightarrow$ X ist nicht kompakt.



<u>Definition</u>: Eine Teilmenge $X \subset M$ eines metrischen Raumes heißt wegzusammenhängend $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, a, b \in X$ gibt es eine <u>stetige</u> Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow \underline{X}$ mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

<u>Satz</u>: (Zwischenwertsatz) Sei X wegzusammenhängend (Intervall) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. (in M benutzt man den Abstandsbegriff, der X wegzusammenhängend macht). Dann gilt:
$\forall\, a, b \in X$ und alle $z \in [f(a), f(b)]$ bzw $z \in [f(b), f(a)]$ gibt es ein $c \in X$ mit $f(c) = z$.

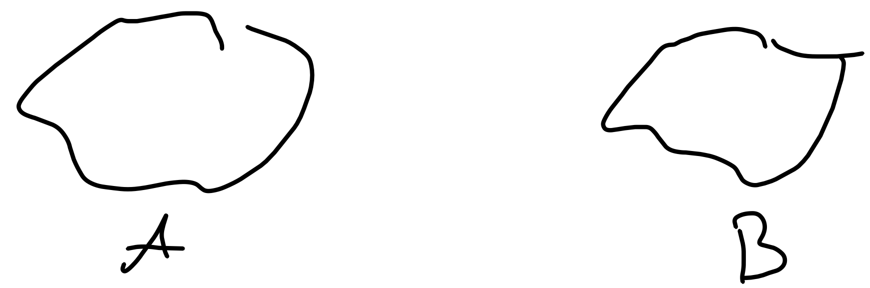
<u>Beweis</u>:



Sei $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$ $\gamma(1) = b$
Sei $g := f \circ \gamma$ $\quad g : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad c = \gamma(\xi)$

Der ZWS aus Ana 1. liefert, dass ein $\xi \in [0,1]$ exist. mit $g(\xi) = z$. Wähle $c = \gamma(\xi) \ldots$ $\square$

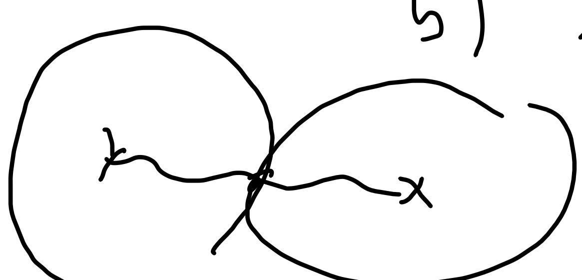
<u>Definition</u>: Ein topologischer Raum M heißt zusammenhängend
:$\Leftrightarrow$ M kann nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener, nicht leerer Mengen geschrieben werden.



Eine Menge X (Teilmenge eines topologischen Raumes) heißt <u>nicht</u> zusammenhängend. :$\Leftrightarrow$ $\exists$ U, V disjunkt und offen mit

a) $X \subset U \cup V$

b) $X \cap U \neq \emptyset$ und $X \cap V \neq \emptyset$



Satz: Wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend.
(bzgl. des selben Abstandsbegriffs)

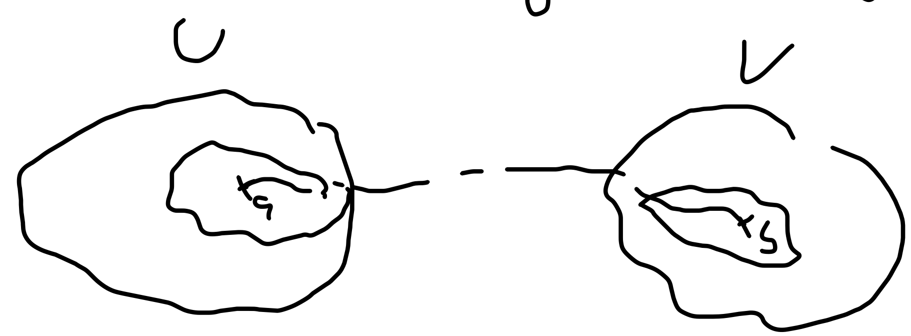
Beweis Sei X wegzus., WA: X ist nicht zusammenhängend.

$\Rightarrow \exists\, U, V$ disjunkt und offen mit

$X \subset U \cup V$, $\quad X \cap U \neq \emptyset$, $\quad X \cap V \neq \emptyset$

Sei $a \in X \cap U$ und $b \in X \cap V$.

Da X wegzus. $\exists\, \gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$
$\gamma(1) = b$.



Betrachte: $\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in U\} =: A$

A ist abgeschlossen. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ konvergent.

$\Rightarrow \gamma(t_n) \in V^c \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (U, V$ disjunkt$)$

$\lim\limits_{n \to \infty} \gamma(t_n)$ existiert wegen Stetigkeit von γ.
er liegt in V^c, da V^c abgeschlossen.

$X \subset U \cup V \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \gamma(t_n) \in U. \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} t_n \in A$

$\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in U\} := A$ ist abgeschlossen

$\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in V\} := B$ ist abgeschlossen

$[0,1] = A \,\dot\cup\, B$ $\lightning$

$\left(([0,1] \cap B)^c \text{ ist offen} \right.$

$\left. = A \cup [0,1]^c \quad \lightning \right)$

Satz: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. (Abstandsbegriff aus $\|\cdot\|$)

X zusammenhängend $\Rightarrow$ X wegzusammenhängend.

Beweis: $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend.

Seien $a, b \in X$.

$A := \{c \in X$ mit: $\exists\, \gamma : [0,1]$ stetig $\gamma(0) = a,\ \gamma(1) = c\}$

$B := \quad \ldots \quad \gamma(0) = b,\ \gamma(1) = c\}$

Falls $c \in A \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_c(\varepsilon) \subset X$ (X offen).

Da sich jedes Element im Ball mit stetigem Pfad erreichen lässt $\Rightarrow B_c(\varepsilon) \subset A \Rightarrow A$ offen. Auch B ist offen.