Termin-ID: NTIwODA5

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 08.11.21

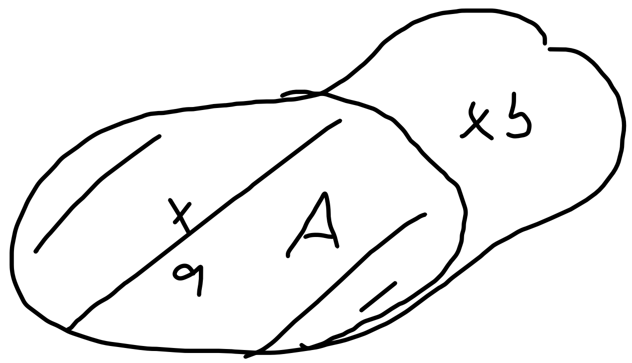
Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Wegzusammenhängend $\Rightarrow$ Zusammenhängend

z.B. im $\mathbb{R}^n$ gilt: offen + zusammenhängend $\Rightarrow$ wegzusammenhängend.



X

$A : \{x \in X : \exists \text{ Weg von } a \text{ nach } x\}$

A ist offen

Betrachte die Menge $M := \underbrace{\bigcup_{\substack{x \in X \\ x \notin A}} \{y \in X : \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y\}}_{\text{disjunkt zu } A\,!} \subset A^c$

$\Big($Falls $\exists c \in A,\ c \in X \Rightarrow \exists$ Weg von a nach c und c nach $x \in A^c$

$\Rightarrow \exists$ Weg von a nach $x \in A^c$ ↯$\Big)$

M ist als Vereinigung offener Mengen offen.

A ist nicht leer. Da X zusammenhängend $\Rightarrow \nexists\ A, B$ offen, disjunkt nicht leer mit $X \subset A \cup B$!

$\Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow b \in A$ $\square$

Vollständigkeit

Ana I: vollständig ist sowas wie Lückenlosigkeit einer Menge.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ in einem metrischen Raum (M,d) heißt Cauchy Folge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \cancel{|a_m - a_k| < \varepsilon}$ $\forall k,m \geq N$

$d(a_m, a_k) < \varepsilon$

Der Raum M heißt vollständig $:\Leftrightarrow$ jede C.F. in M konvergiert.

Satz: Jede konvergente Folge ist C.F. $(d\,!)$

Beweis: Analog zu Ana I.

Satz: Falls (M,d) vollständig und $X \subset M$ abgeschlossen so ist (X,d) ebenfalls vollständig.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine C.F. Da $X \subset M$ und M vollständig existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} a_n \in M$. Da X abgeschlossen liegt dieser auch in X.

Es gilt auch die Rückrichtung, d.h. vollständig $\Rightarrow$ abgeschlossen.
d.h. gegeben (M, d) vollständig. Dann gilt $X \subset M$ vollst. $\Rightarrow$ X abge.

__Bemerkung__: Bzgl. Abstandsbegriffen die von einer Norm kommen ist jede endlichdimensionale VR vollständig.

Dazu betrachte die $\|\cdot\|_1$-Norm. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ Cauchy Folge so ist jede Koordinate eine C. F.

$$\|a_m - a_\ell\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |\lambda_m^j - \lambda_\ell^j| \qquad \left(a_m = \sum_{j=1}^{d} \lambda_m^j \, b_j\right)$$

$$\Rightarrow |\lambda_m^j - \lambda_\ell^j| \leq \|a_m - a_\ell\|_1$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$ gilt also: $(\lambda_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.
Da $\mathbb{R}$ vollständig ist existiert für jede Koordinate der Limes.

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^j = \lambda^j. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^d) \ldots$$

Stetigkeit

(N, d_2)

Sei (M, d_1) ein metrischer Raum. Die Stetigkeit hatten wir bereits definiert.

Falls M, N ein VR, d_1, d_2 von einer Norm herrührt dann gilt:

Falls f, g stetig $\Rightarrow$ $f+g$ ist stetig, $f-g$ ebenso.

$$f, g \text{ stetig} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = f(x) + g(x)$$

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Ebenso gilt: λf ist stetig falls f stetig $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

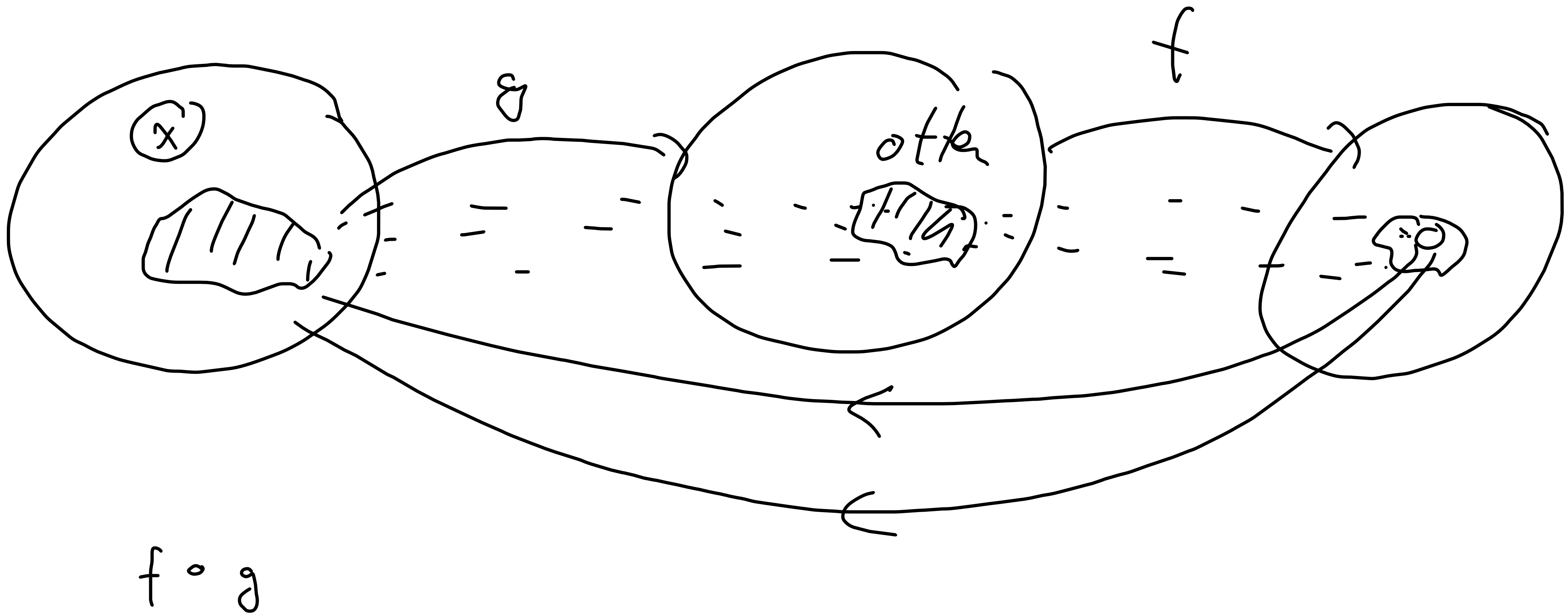
Satz: Die Komposition stetiger Funktionen $f \circ g$ mit

$f: M_1 \to M_2 \qquad g: M_0 \to M_1$, (M_0, d_0), (M_1, d_1), (M_2, d_2) metrische Räume.

ist selbst stetig

<u>Beweis</u>: Sei $O \subset M_2$ offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(O)$ ist offen da f stetig

$\Rightarrow$ $g^{-1}(f^{-1}(O))$ ist offen da g stetig $= (f\circ g)^{-1}(O)$ ☐



Def: Eine Funktion $f : V \to W$, V, W seien VR, heißt gleichmäßig stetig $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so dass $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ falls $\|x - y\| < \delta$

Die entsprechende Definition wählt man auch falls der Def.bereich von f Teilmenge von V. (x, y aus dem Definitionsbereich)

(geht auch für metrische Räume, Abstandsbegriff entscheidend).

Der Unterschied zur Stetigkeit ist, dass x nicht festgehalten wird. Man muss ein δ finden, welches für alle x im Definitionsbereich gleichzeitig ergibt, dass $\|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$ für $\|x-y\| < \delta$.

<u>Satz</u>: Eine auf einer kompakten Menge stetige Flt ist auch gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: Sei $D \subset V$ V ist Vektorraum.

$f: D \to W$ stetig, außerdem D kompakt.

z.z. f ist glm. stetig.

WA: f ist <u>nicht</u> gleichm. stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in D \text{ mit } \|x-y\| < \delta \text{ so dass } \|f(x)-f(y)\| \geq \varepsilon.$$

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$. Die entspr. x, y nennen wir x_n und y_n

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ und $\|f(x_n)-f(y_n)\| \geq \varepsilon$

D ist kompakt. $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = x \in D$

Da $\|x_n - y_n\| \to 0$ ist auch $(y_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes x.

Da f stetig ($x \in D$!) gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) = f(x) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n(k)})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)}) = 0$$

Aber $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $\| f(x_{n(k)}) - f(y_{n(k)}) \| \geq \varepsilon$ $\lightning$

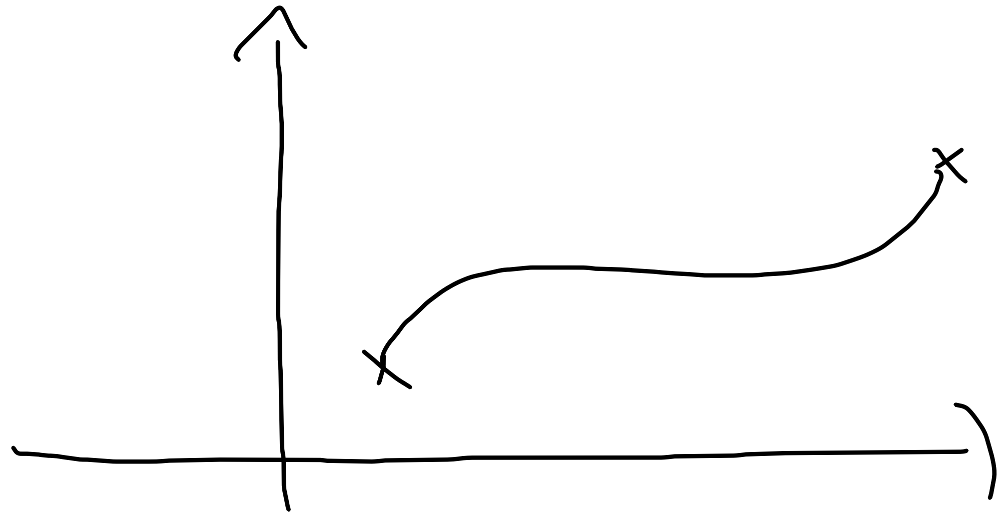
Kurven im $\mathbb{R}^n$

Anm 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir werden in Analysis II verallgemeinerungen betrachten, d. h. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition: Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stetig, I sei ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Dann nennt man γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und die Menge

$S := \{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in I \text{ mit } \gamma(t) = x \}$ Spur der Kurve.



Spcv