Termin-ID: NTIwODIw

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 09.11.21

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

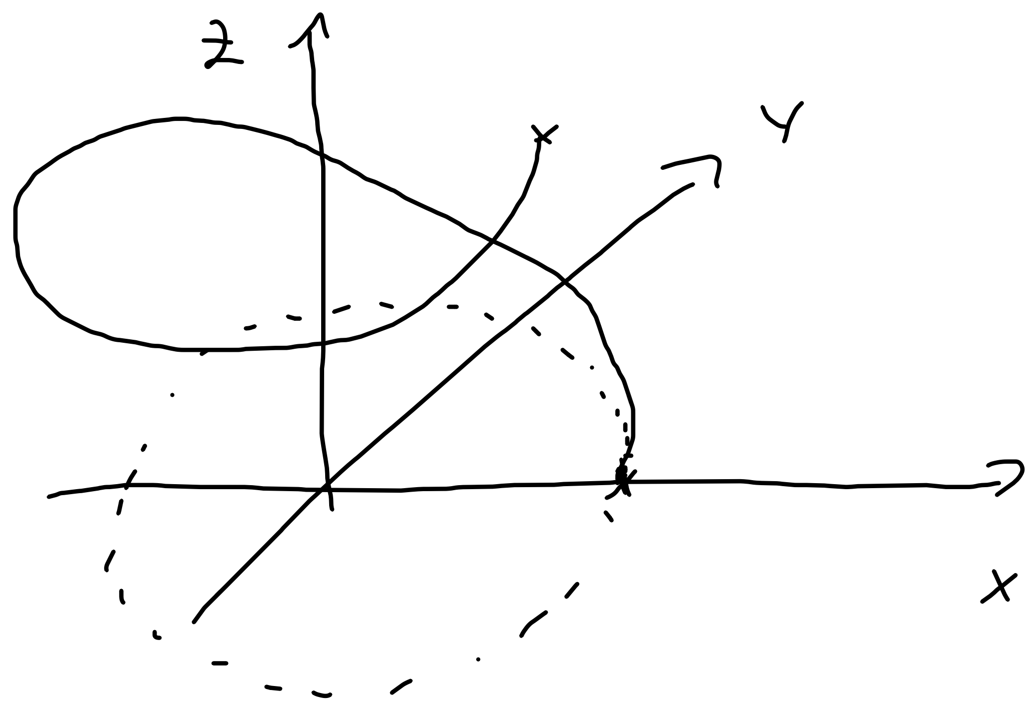
Kurve: $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig

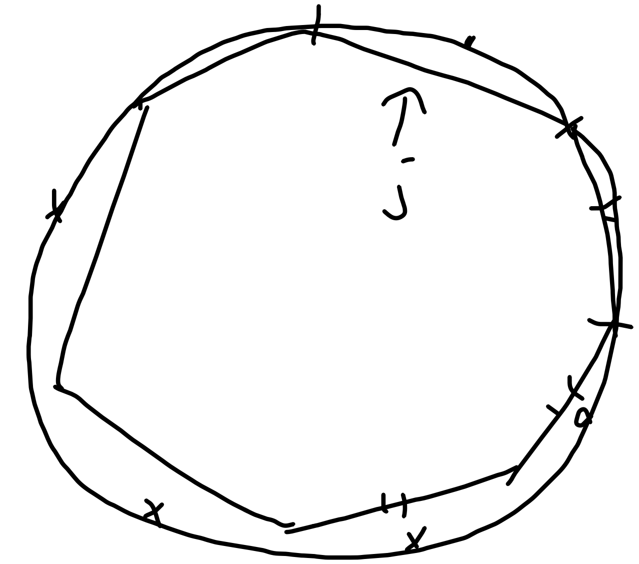
Spur: $\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in I \text{ mit } \gamma(t) = x \}$

<u>Bsp</u>: $I := [0, 2\pi]$ $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)$

$\gamma(t)$ ist stetig, da jede Komponente stetig ist.

(somit ist γ bzgl $|\cdot| \to \|\cdot\|_1$ stetig).





<u>Definition</u>: Sei γ eine Kurve, d.h. $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. stetig.

Sei $I = [a, b]$, $t_0 = a < t_1 < t_2 \dots < t_k = b$ eine Unterteilung.

$$L(\gamma) := \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ t_0, t_1 \dots}} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 \right\}$$ heißt Länge von γ.

Falls $L<\infty$ heißt γ rektifizierbar.

Falls $\gamma :]a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(\gamma) := \lim_{\varepsilon \to 0} L\left(\gamma\big|_{[a+\varepsilon,b]}\right). \quad \text{etc.}$$

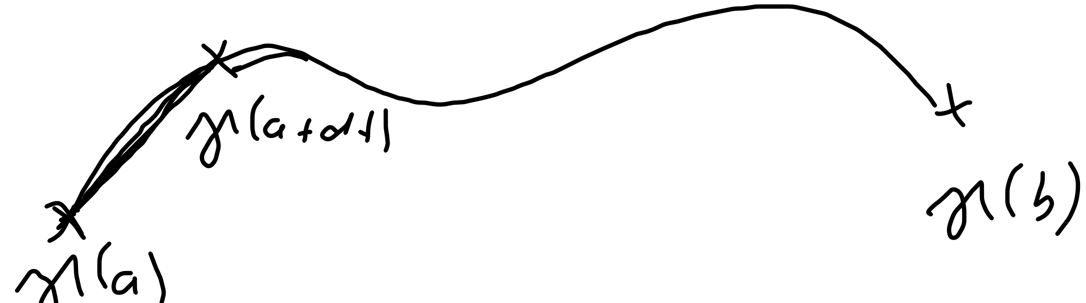
<u>Satz</u>: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar $\Rightarrow$

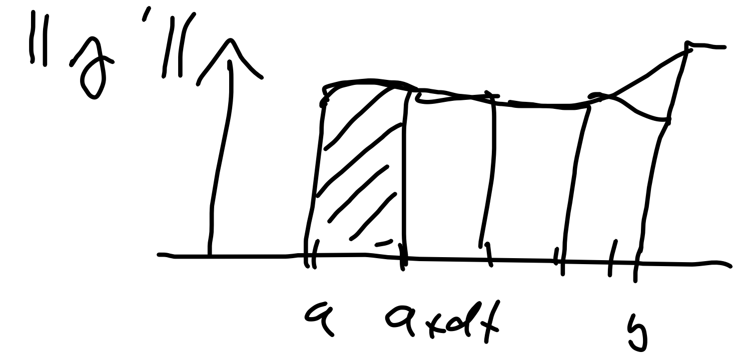
$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

<u>Bemerkung</u>: γ ist stetig diffbar, falls jede Komponente stetig diffbar ist. $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3' \dots)$

falls $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots)$

<u>Beweis</u>:



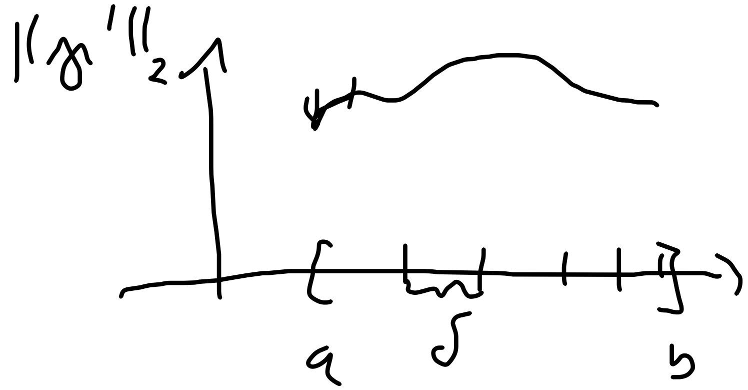


$$\gamma(a+dt) - \gamma(a) \approx \gamma'(a) \cdot dt$$

$$\| \quad \cdot \quad \|_2 \approx \|\gamma'(a)\|_2 \cdot dt$$

1. Schritt: Da γ' auf $[a,b]$ stetig, ist γ' auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass in jedem Intervall der Länge δ γ' höchstens um ε variiert



$$a = t_0 < t_1 = t_0 + \delta < t_2 \dots t_\ell = b$$

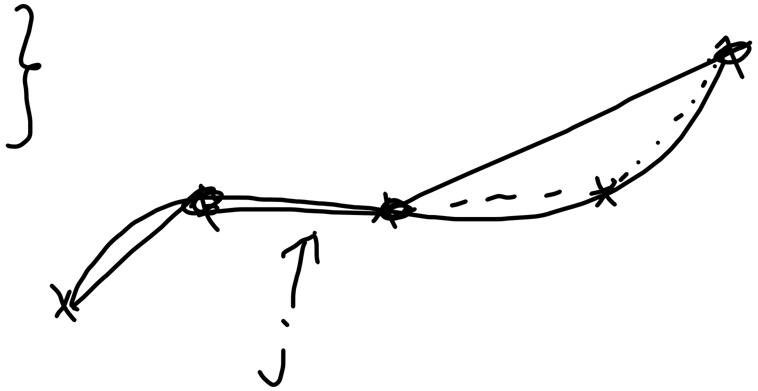
$$|t_j - t_{j-1}| \le \delta .$$

Es gilt: $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\|_2 < \varepsilon$ falls $t_{j-1} \le s < t \le t_j$

2. Schritt: Wir möchten $L(\gamma)$ mit $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ vergleichen.

o.B.d.A können wir annehmen, dass wir nur Unterteilungen mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ haben.

$$L(\gamma) = \sup_{\dots} \left\{ \sum \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \right\}$$



Wir vergleichen nun

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt \quad \text{mit} \quad \|\gamma(t_{j-1}) - \gamma(t_j)\|_2$$

Wegen MWS $\exists\ s \in [t_{j-1}, t_j]$ so dass

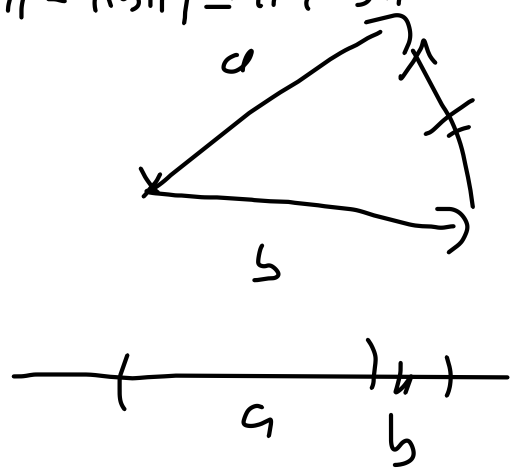
$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \|\gamma'(s)\|_2 \cdot (t_j - t_{j-1})$$

dies vergleichen wir mit $\underbrace{\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2}_{\text{H.S.}} = \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \right\|_2$

H.S.
komponentenweise

$$\left| \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \right\|_2 - \|\gamma'(s)\|_2 \, (t_j - t_{j-1}) \right| = \left| \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \right\|_2 - \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s)\, dt \right\|_2 \right|$$

$\big| \|a\| - \|b\| \big| \le \|a - b\|$



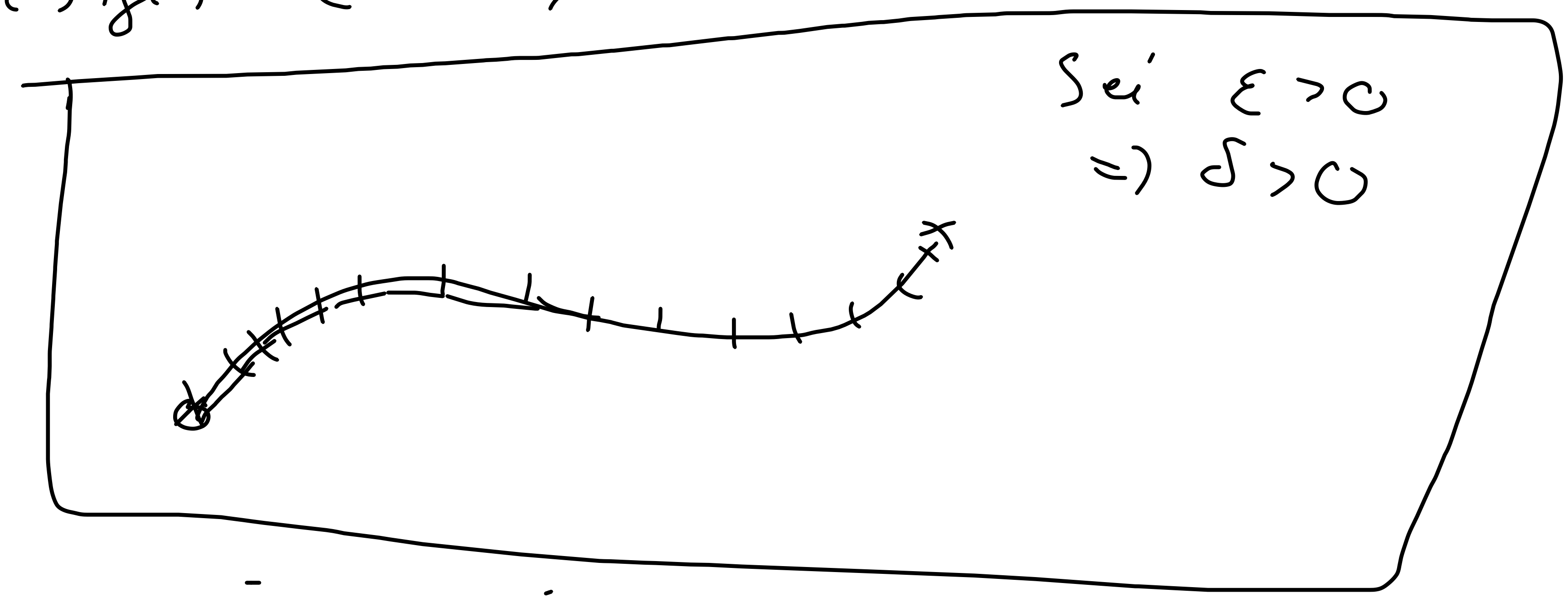
$$\le \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s)\, dt \right\|_2 =$$

$$= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) - \gamma'(s) \, dt \right\|_2 \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\|_2}_{< \varepsilon} \, dt$$

$$< (t_j - t_{j-1}) \cdot \varepsilon$$

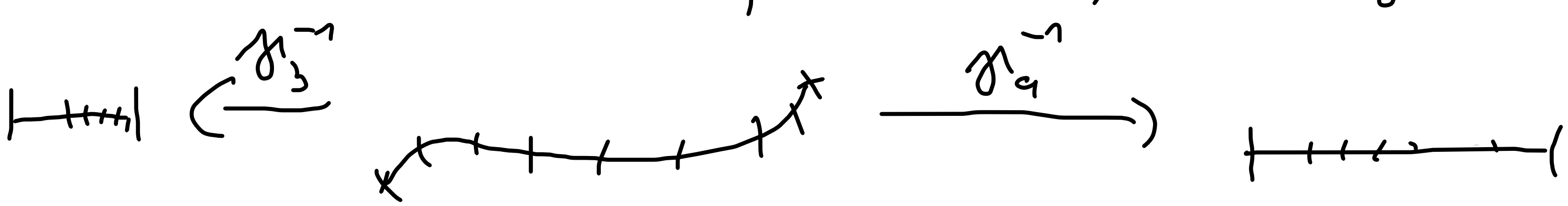
Insgesamt ist die Diff. von der Länge des Polygonzuges und $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ gleich $(b-a)\cdot\varepsilon$.

Dies gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$, daher kommt die Gleichheit.



Bem: Das Integral existiert immer, da der Integrand stetig.

Bem: Zwei unterschiedliche Kurven, die injektiv sind und die selbe Spur haben, sind gleich lang.



Betrachte eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv. Sei $\phi : [c,d] \to [a,b]$ stetig diffbar und bijektiv.

Dann hat die Kurve $\lambda : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ geg. durch $\lambda(t) = \gamma(\phi(t)) = (\gamma \circ \phi)(t)$ die selbe Spur und Länge wie γ.

$$\int_c^d \|\lambda'(t)\|_2 \, dt = \int_c^d \|\gamma(\phi(t))'\|_2 \, dt =$$

$$= \int_c^d \|\gamma'(\underbrace{\phi(t)}_{s})\|_2 \cdot \underbrace{\phi'(t)\, dt}_{ds} = \int_{\phi(c)=a}^{\phi(d)=b} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds$$

<u>Definition</u>: So ein ϕ nennt man auch Umparametrisierung der Kurve.

<u>Bsp</u>: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos t, 1)\|_2 \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\sqrt{2} \cdot \pi$$

$$\lambda(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 2\pi t) \qquad t \in [0,1]$$

$$L(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{4\pi^2 \sin^2 2\pi t + 4\pi^2 \cos^2 2\pi t + 4\pi^2} \, dt = \int_0^1 2\pi\sqrt{2} \, dt = \checkmark$$

<u>Definition</u>: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektiv, stetig diffbare Kurve.
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennt man

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

Integral erster Art.