Übungen zu Analysis 2
(Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 1

Aufgabe 1:

In der Vorlesung haben wir gelernt, dass der Konvergenzbegriff von der gewählten Metrik abhängt. Dies ist bereits für Folgen in $\mathbb{R}$ der Fall, wie in dieser Aufgabe gezeigt werden soll. Gegeben seien für $i \in \{a, b, c\}$ die Abbildungen $d_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$\begin{aligned} d_a(x, y) &= |x - y| \\ d_b(x, y) &= |\arctan(x) - \arctan(y)| \\ d_c(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{falls} |x - y| < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Welche dieser Abbildungen sind Metriken? Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Für $i \in \{a, b, c\}$ ist A_i die Aussage der Konvergenz der Folge bzgl. des Abstandsbegriffs d_i, d.h.

$$A_i : \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ sodass } d_i(a_k, a) < \epsilon \; \forall k \geq n.$$

(Ignorieren Sie hier, dass d_i nicht notwendiger Weise eine Metrik ist). Zeigen oder widerlegen Sie jeweils $A_i \Rightarrow A_j$ für alle Paare $i, j \in \{a, b, c\}$.

Aufgabe 2: Es seien V, W endlich dimensionale Vektorräume mit Normen $||\cdot||_V$ bzw. $||\cdot||_W$. Es sei $f : V \to W$ und $x \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender alternativen Definitionen von Stetigkeit:

a) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass $||x - y||_V < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_W < \epsilon$

b) $\lim_{n\to\infty} ||a_n - x|| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f(a_n) - f(x)||_W = 0$.

Aufgabe 3: Seien X, Y metrische Räume, wobei X mit der diskreten Metrik $d_d : X \times X \to \{0, 1\}$ gegeben durch:

$$d_d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ausgestattet ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall jede Funktion $f : X \to Y$ stetig ist.

Aufgabe 4: Sei X ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}_0^+$. Sei Y ein metrischer Raum, wobei Y mit der diskreten Metrik (vgl. Aufgabe 3) $d_d : Y \times Y \to \{0, 1\}$ versehen ist. Weisen Sie nach, dass die Abbildung $d_{\text{eukl}} : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$,

$$d_{\text{eukl}}(x, y) = \sqrt{(}< x - y, x - y >)$$

eine Metrik auf X definiert, und zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : X \to Y$ konstant ist.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, 27.10.2021, um 14.00 Uhr. Die Tutorien, in denen die Hausaufgaben besprochen werden, beginnen am 27.10.2021.