Termin-ID: NTIwODA1

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 10.01.22

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Grafisches Lösen von DGL

Wir betrachten: $y' = f(y)$ $\quad y \in \mathbb{R}^n \quad n > 1$.

Bsp.: Gedämpfte Schwingung: $\ddot{x} = -\omega^2 x - \gamma \dot{x} \quad | :\omega^2$

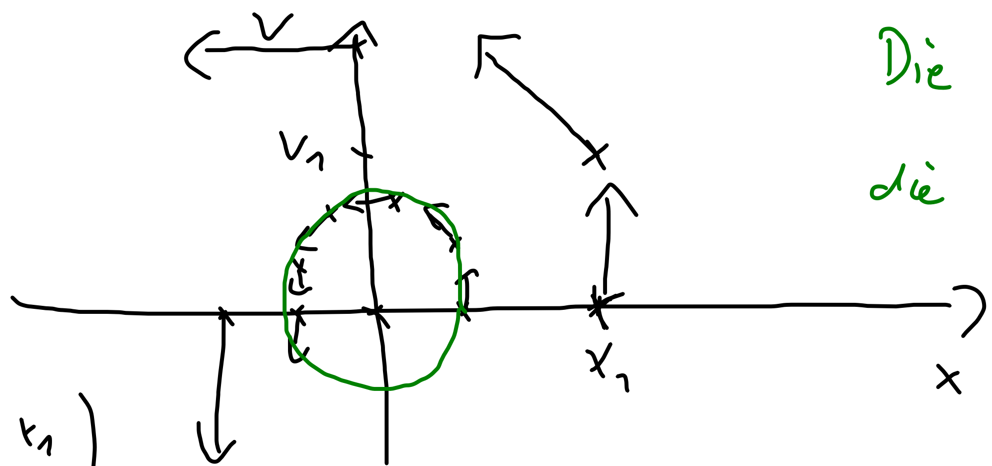
o.B.d.A können wir $\omega^2 = 1$ wählen: $\ddot{x} = -x - \gamma \dot{x}$

Den allgemeinen Fall bekommen wir durch umskalieren der Zeit.

$$\frac{d^2x}{\omega^2 dt^2} = -x - \frac{\gamma}{\omega^2}\frac{dx}{dt} \qquad \tau := \omega t$$

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \qquad v := \dot{x}$$

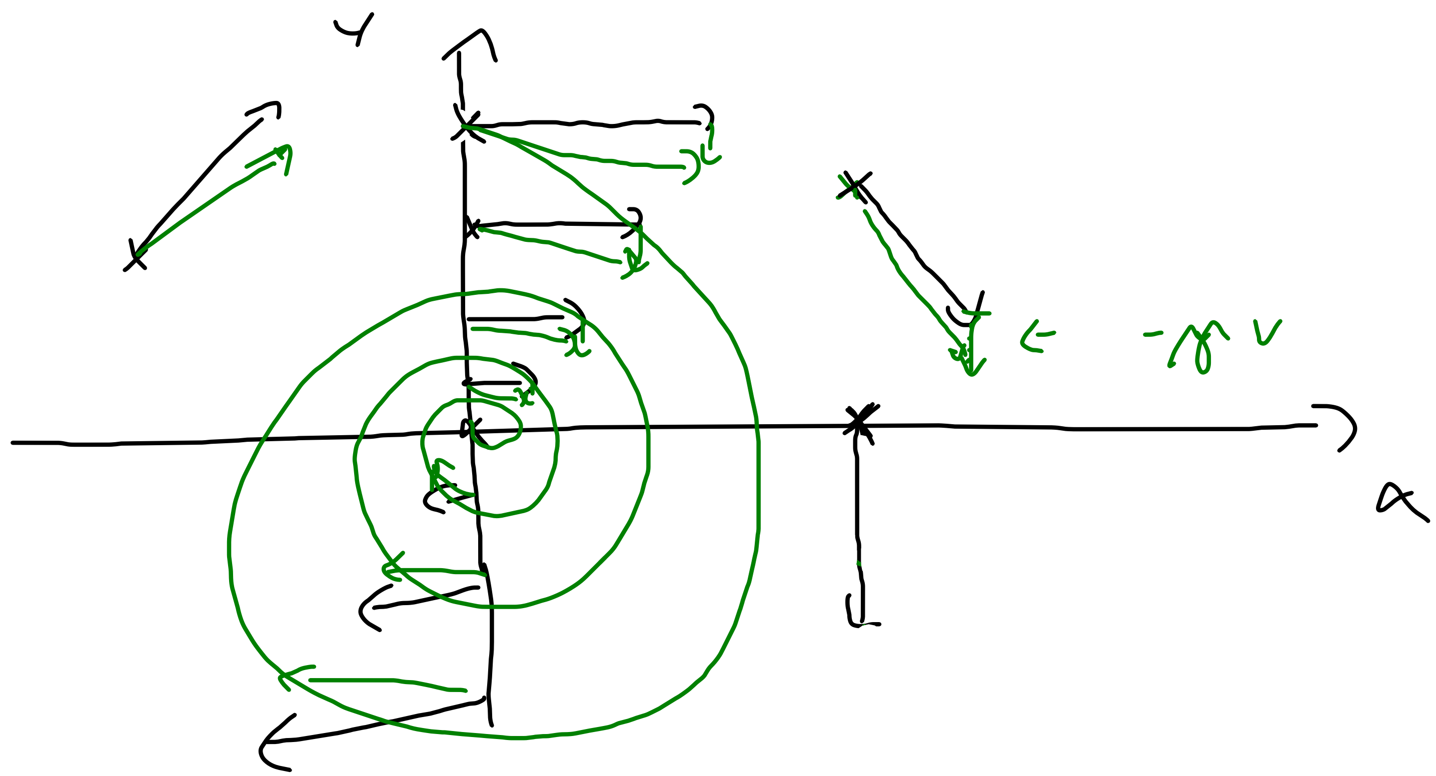
Zunächst $\gamma = 0$



$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, Betrachte $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

Die Lösungen der DGL sind die Integralkurven des Vektorfeldes, d.h. die Tangenten an die Lösungen sind parallel zu den Vektoren.

Für $\gamma > 0$



Das lässt sich allgemein für $\dot{y} = f(y)$ anwenden,
Wir zeichnen für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $f(y) \in \mathbb{R}^n$.

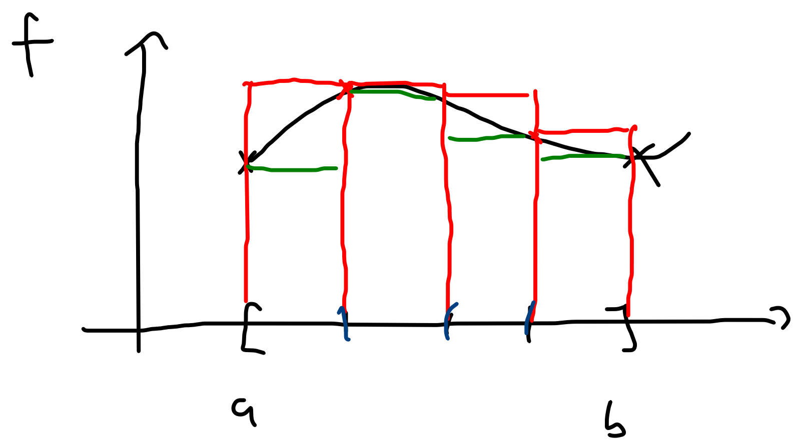
$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -x^2 - \cancel{\hat{\gamma} \frac{dx}{d\tau}} \qquad x(\tau), \quad \text{Subst.} \quad \tau = \omega \cdot t$$

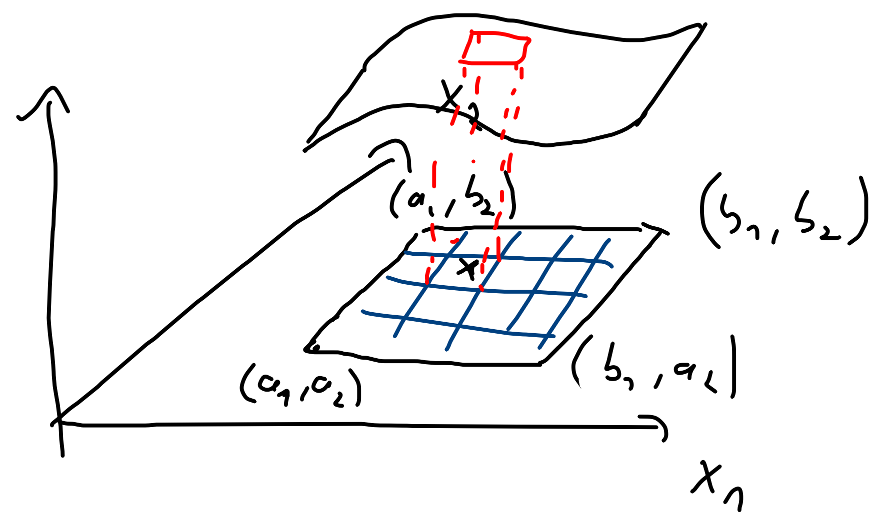
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x^2 - \cancel{\gamma \frac{dx}{dt}} \qquad \frac{d}{dt} x(\omega t) = x'(\omega t) \cdot \omega$$

$$\frac{d^2 x(\omega t)}{dt^2} = x''(\omega t) \cdot \omega^2$$

Integration im $\mathbb{R}^n$

Wir möchten die Integration nach Riemann auf Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, auf $n > 1$ verallgemeinern.





Wie in Analysis 1 bilden wir Abschätzungen von Oben und von Unten:

Sei $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$. Für jedes $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ definiere eine Abschätzung von oben und unten:

$$O(n_1, n_2) := \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \underbrace{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \frac{1}{n_1 \cdot n_1}}_{\text{Fläche eines Teilquaders}} \sup\{ f(x_1, x_2) : x_1 \in I_j,\ x_2 \in K_k \}$$

$$I_j := \left[a_1 + \frac{(j-1)}{n_1}(b_1 - a_1),\ a_1 + \frac{j}{n_1}(b_1 - a_1) \right] \qquad K = \left[a_2 + \frac{(k-1)}{n_2}(b_2 - a_2),\ a_1 + \frac{k}{n_1}(b_1 - a_1) \right]$$

$U(n_1, n_2) =$ ..... inf .... (analog)

$$O := \inf \{ O(n_1, n_2) : (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \}$$

$$U := \sup \{ U(n_1, n_2) : (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \}$$

Definition: Falls $U = O$ so nennt man f Riemann integrierbar. Der Wert des Integrals ist gleich U bzw O:

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f \, d^2x = U = O.$$

Falls $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt dann wähle einen Quader $Q \supset D$ und definiere:

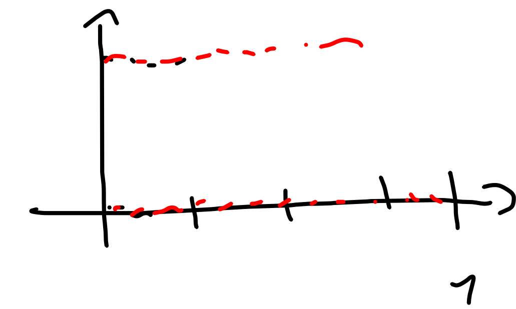
$$\int_D f(x_1, x_2) \, d^2x = \int_Q f(x_1, x_2) \cdot 1\!\!1_D(x_1, x_2) \, d^2x$$

Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$ klar.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann nennt man

$$\int_D 1 \, d^n x$$ den Jordaninhalt von D.

Bem: $$\int_D 1 \, d^n x = \int_Q 1\!\!1_D \, d^n x$$ mit $D \subset Q$.



Satz: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Quader.

Falls f stetig $\Rightarrow$ f (Riemann)-integrierbar.

Bemerkung: Falls f stetig, $D \in \mathbb{R}^n$ beschränkt. Kann es passieren, dass

$\int_D f \, d^n x$ **nicht** existiert.

Bsp: $f \equiv 1$ $\quad$ $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist beschränkt.

$$\int_D 1 \, d^n x = \int_0^1 1\!\!1_{\mathbb{Q}} \, dx$$

$U(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$O(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Da f auf dem kompakten Quader Q stetig ist, ist f dort gleichmäßig stetig.

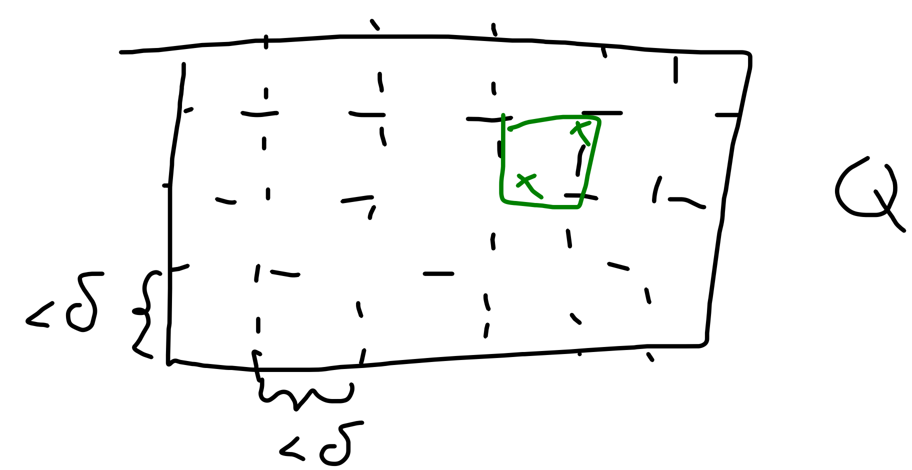
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{so dass} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{falls } \|x - y\|_\infty < \delta$$

$$\|x-y\|_\infty := \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots \}$$

Falls n_1, n_2 hinreichend groß sind, gilt in jedem Teilquader

$\|x-y\|_\infty < \delta$: $\quad n_1 > \dfrac{|b_1 - a_1|}{\delta} \qquad n_2 > \dfrac{|b_2 - a_2|}{\delta}$ usw.



$\Rightarrow$ für jeden Teilquader gilt:

$$\sup\{f(x),\ x \in Q(j, l \ldots)\} - \inf\{f(x),\ x \in Q(j, l \ldots)\} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow O(n_1, n_2 \ldots) - U(n_1, n_2 \ldots) \leq \varepsilon \cdot |Q| \quad \Rightarrow \quad O - U = 0$$

$$0 = \inf\{\underbrace{O(x_1, x_2 \dots) - U(x_1, x_2 \dots)}_{\le \varepsilon \cdot |Q|}\} \ge \inf\{O(x_1, x_2, \dots\} - \sup\{U(x_1, \dots x_2\} = O - U \ge 0$$

$$\Rightarrow O - U = 0$$