MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WS 2021/22

Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl
Manuela Feistl, Viet Hoang

Blatt 10

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(0) = 1$$

unendlich viele Lösungen auf $\mathbb{R}$ und eine eindeutige Lösung auf $(-1, \infty)$ besitzt.

Hinweis: Um die Eindeutigkeit zu zeigen, weisen Sie beispielsweise nach, dass jede Lösung $\psi : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ *des AWP der Lösung* $\phi : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ *aus der Separation der Variablen entsprechen muss.*

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: Seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x + t, \qquad x(t_0) = x_0.$$

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem für alle t_0, x_0 eine eindeutige Lösung hat.

b) Für eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ definieren wir die n-te Picard-Iterierte mit Anfangsfunktion $x^{(0)}(t)$ rekursiv für $1 \leq n$ durch

$$x^{(n)}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^{(n-1)}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Bestimmen Sie die n-te Picard-Iterierte mit der konstanten Funktion $x^{(0)}(t) = x_0$ als Anfangsfunktion.

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems. Konvergiert die Picard-Iteration gleichmäßig gegen die Lösung?

Aufgabe 3 *(3 Punkte)*: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' = -\omega^2 y - \gamma y'$$

mit $\gamma^2 = 4\omega^2$ und $\gamma > 0$, welche einen gedämpften harmonischen Oszillator im aperiodischen Grenzfall beschreibt.

a) Reduzieren Sie die Differentialgleichung auf $v' = Av$ mit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie die Lösung $\Phi(x, x_0) = e^{A(x-x_0)}$ der Differentialgleichung. Finden Sie hierfür eine geeignete Basis für A, sodass die entsprechende Matrix obere Dreiecksform hat. Schließen Sie dann ausgehend von der Reihendarstellung auf das Matrixexponential $e^{A(x-x_0)}$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Zeigen Sie: Die Funktion $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,t) := t^{-d/2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial t} u,$$

wobei der Laplace-Operator Δ hier nur auf die räumliche Variable $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ wirken soll.

Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 12.01.2022, um 14.00 Uhr.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!