Termin-ID: NTIwODI0

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 11.01.22

Uhrzeit von / bis: 12:15 - 13:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Satz: (Monotonie des Integrals)

Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ $\quad Q \in \mathbb{R}^n$ quadr.

Falls $f \leq g$ $\quad$ (d.h. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in Q$)

und f, g integrierbar $\Rightarrow$ $\int_Q f \, d^n x \leq \int_Q g \, d^n x$

Beweis: $f \leq g$ gilt sind alle suprema und Infima auf den kleinen Teilquadern entsprechend "$\leq$"

$$\Rightarrow \quad O^f(n_1, n_2 \ldots) \leq O^g(n_1, n_2 \ldots)$$

$$\left[U^f(n_1 \ldots) \leq U^g(\ldots) \right]$$

$$\Rightarrow \int_Q f \, d^n x = \inf \{ O^f(n_1, n_2 \ldots), \; n_1, n_2 \ldots \in \mathbb{N} \} \leq \inf \{ O^g \ldots \} = \int_Q g \, d^n x$$

Satz (Linearität des Integrals): Sei Q Quader in $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Dann ist $\lambda f + g$ integrierbar mit

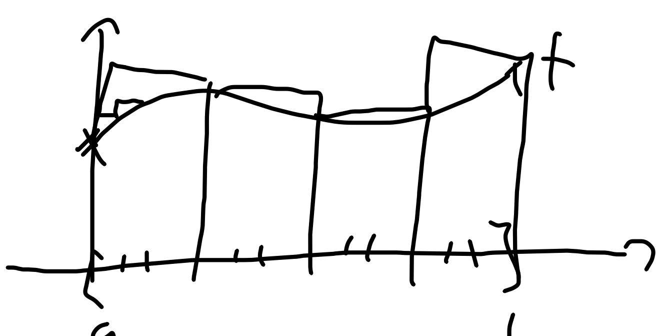
$$\int_Q \lambda f + g \, d^n x = \lambda \int_Q f \, d^n x + \int_Q g \, d^n x$$

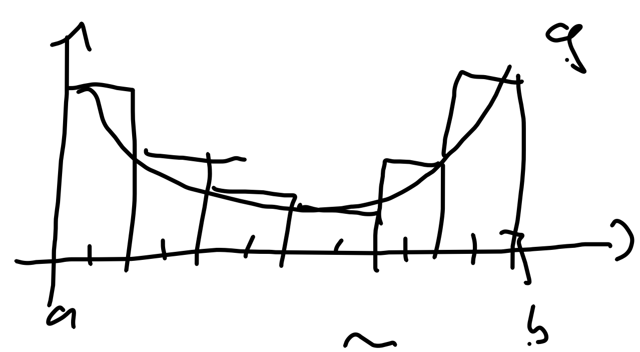
Beweis: "λf" Jeder Schritt der Definition ist verträglich mit Multiplikation mit λ: $\inf\{\lambda f(x) : x \in \text{Teilquader}\} = \lambda \cdot \inf\{f(x) \ldots\}$

$O^{\lambda f}(n_1 \ldots) = \lambda \cdot O^f(n_1 \ldots)$, $U^{\lambda f}(n_1 \ldots) = \lambda U^f(n_1 \ldots)$

$O^{\lambda f} = \lambda O^f \quad U^{\lambda f} = \lambda U^f \Rightarrow \int_Q \lambda f \, d^n x = \lambda \int_Q f \, d^n x.$

"$f+g$":



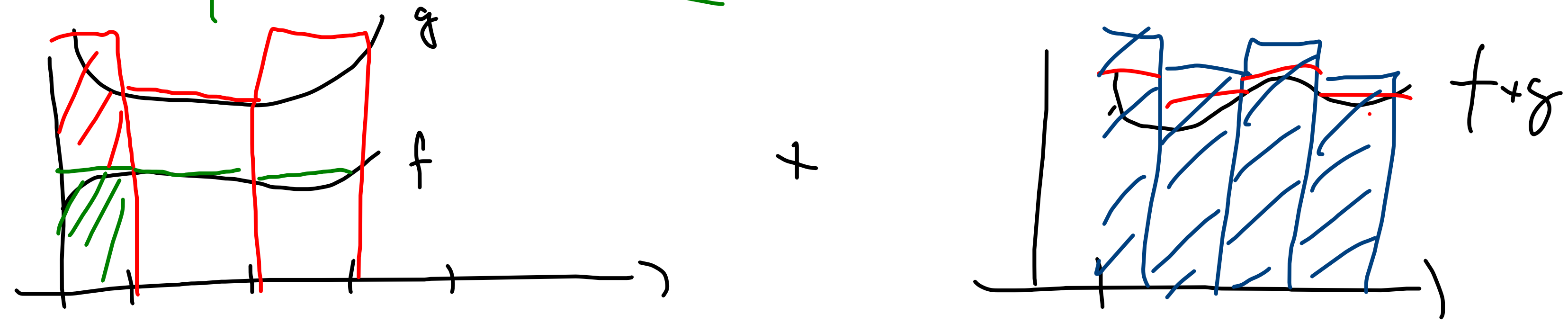


$\vec{m} = (m_1, m_2 \ldots)$ so dass $O^f(\vec{m}) \le \int_Q f \, d^n x + \varepsilon$ $\quad \tilde{\vec{m}}$ so dass $O^g(\tilde{\vec{m}}) \le \int g + \varepsilon$

Wählt man $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots)$ mit $m_j = n_j \cdot \tilde{n}_j$ erhält man jeweils eine Verfeinerung.

$$O^f(\vec{m}) \le \int_Q f \, d^n x + \varepsilon \qquad O^g(\vec{m}) \le \int_Q g \, d^n x + \varepsilon$$

$$O^f(\vec{m}) + O^g(\vec{m}) \ge O^{f+g}(\vec{m})$$



— = sup im Teilintervall

$$O^{f+g}(\vec{m}) \le \int_Q f \, d^n x + \int_Q g \, d^n x + 2\varepsilon$$

analog

$$U^{f+g}(\vec{m}) \ge \int f + \int g - 2\varepsilon$$

$$O^{f+g} := \inf\{O^{f+g}(\vec{m}) \dots\} \le \int_Q f + \int_Q g$$

$$U^{f+g} \ge \int_Q f + \int_Q g$$

Da $U^{f+g} \le O^{f+g} \Rightarrow$ jeweils "="

Satz (Fubini): Sei $Q = A \times B$ mit A Quader in $\mathbb{R}^n$, B Quader in $\mathbb{R}^m$.

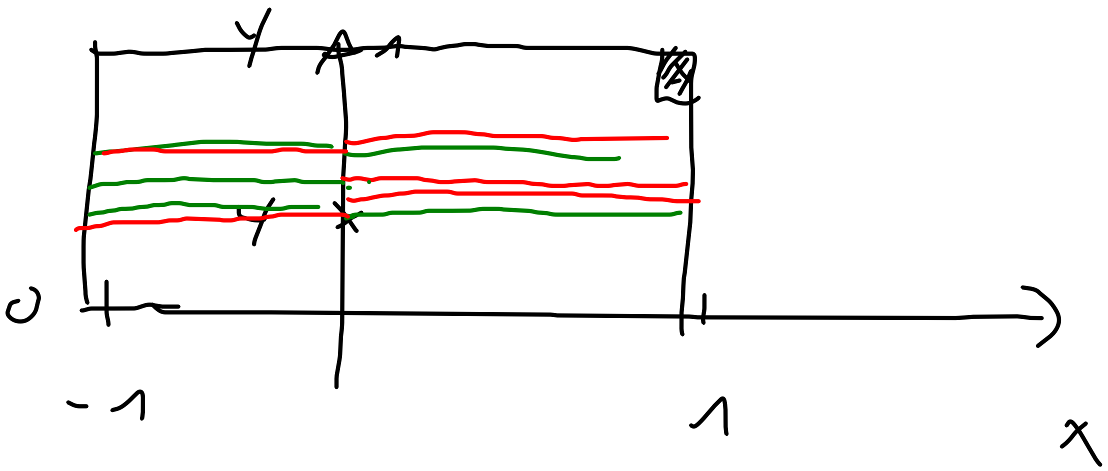
Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Außerdem existiere für jedes $y \in B$ das Integral $\int_A f(x,y)\, d^n x := F(y)$ sowie $\int_B F(y)\, d^m y$. Dann gilt:

$$\int_Q f \, d^{n+m} x = \int_B F(y)\, d^m y$$

Bemerkung: Für $m = n = 1$ ist die linke Seite ein 2-dim Integral. Die rechte Seite besteht aus 2 hintereinander ausgeführten Integralen in $\mathbb{R}$. Diese können wir häufig bestimmen. (Stammfunktion bilden etc.)

Vorsicht! Wenn $F(y)$ existiert (d.h. $f(x,y)$ für jedes y integrierbar ist) und $\int_B F(y)\, d^m y$ existiert muß $f(x,y)$ über Q nicht unbedingt integrierbar sein!

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \{+1, -1\}$



$Q = [-1,1] \times [0,1]$

$F(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 F(y)\,dy = 0$

$f(x,y) = +1$ falls $x > 0$ und $y \in \mathbb{Q}$
oder $x < 0$ und $y \notin \mathbb{Q}$

$f(x,y) = -1$ sonst.

In jedem Teilquader existieren Punkte deren Funktionswerte $+1$ sind
" " " " " " " -1 sind.

$\Rightarrow \quad U(\vec{n}) = -1$
$\quad O(\vec{n}) = 1$

$\Rightarrow \quad U = -1 \quad O = 1 \quad \Rightarrow \quad U \neq O$

Beweis des Fubini:

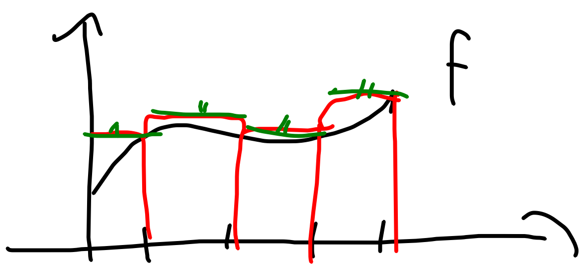
Betrachte $\int_Q f \, d^{n+m} x$

Wähle $\vec{n}$ so dass $O^f(\vec{n}) \le \int_Q f \, d^{n+m} x + \varepsilon$

für ε beliebig. ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists \vec{n}$ so dass $O^f(\vec{n}) \le \int f + \varepsilon$)

Die entsprechende Stufenfunktion liegt oberhalb von f

$f_{\vec{n}} \ge f$ $\qquad f_{\vec{n}}(x) := \sup \{ y$ im Teilquader, der auch x enthält $| f \}$



$f_{\vec{n}}(x)$

$f_{\vec{n}}(x)$ ist Stufenfunktion,

$$\underbrace{\int_B f_{\vec{n}}(x, \underline{y}) \, d^m x}_{\text{Stufenfunktion}} \ge \int_B f(x,y) \, d^n x \quad (\text{Monotonie})$$

$$= F(y)$$

$$O^f(\vec{n}) = \int_A \left(\int_B f_{\vec{n}}(x,y) \, d^n x \right) d^m y \ge \int_A F(y) \, d^m y \Rightarrow \int_A F(y) \, d^m y \le \int f + \varepsilon$$

U's analog

$$\Rightarrow \int_A F(y) \, d^m y \ge \int f - \varepsilon \qquad \square$$

<u>Bsp</u>:

$$\int_{[0,1]^2} y\cos(xy)\,d^2x \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} y\cos(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{[0,1]} \Big[\sin(xy)\Big]_0^1 dy = \int_{[0,1]} \sin y\,dy = \Big[-\cos y\Big]_0^1$$

$$= 1 - \cos 1$$