

# Übungen zu Analysis 2 (Mathematik für Physiker III)

Prof. Dr. P. Pickl  
Manuela Feistl, Viet Hoang

## Blatt 12

**Aufgabe 1** (2 Punkte): Seien  $B \subset \mathbb{R}^n$  Jordan messbar und  $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_B |f(x)g(x)| \, dx \leq \left( \int_B |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_B |g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Hinweis:* Berechnen Sie das Doppelintegral  $\int_B \int_B (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 \, dx \, dy$ .

**Aufgabe 2** (2 Punkte): Skizzieren Sie die Menge  $D := \{ (x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x \}$  und zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\int_D \sqrt{1-x^2} \, d^2x = 2 - \sqrt{2}$$

*Hinweis:* Zerlegen Sie  $D$  in die Mengen  $D_1 = D \cap ([0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times \mathbb{R})$  und  $D_2 = D \cap ([\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \times \mathbb{R})$ .

**Aufgabe 3** (2 Punkte): Sei  $f: [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  nicht beschränkt ist und

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx \neq \int_0^1 \int_0^2 f(x, y) \, dx \, dy.$$

**Aufgabe 4** (2 Punkte): Begründen Sie, ob die Funktion  $f$  aus Aufgabe 3 über  $[0, 2] \times [0, 1]$  integrierbar ist. Berechnen Sie das Integral der Funktion  $f$  über die Mengen  $M_{a,b} = [a, 2] \times [b, 1]$  für  $a \in (0, 2)$  und  $b \in (0, 1)$ . Bestimmen Sie dann den Grenzwert

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \int_{M_{a,b}} f(x) \, d^2x.$$

**Abgabe eines Lösungspdfs je Dreiergruppe bis Mittwoch, den 26.01.2022, um 14.00 Uhr.**