Termin-ID: NTIwODE3

Analysis 2 | MAT-10-01-2 | Veranstaltung

Veranstaltungstitel: Analysis 2 (Vorlesung) (1. Parallelgruppe)

Datum: 13.12.21

Uhrzeit von / bis: 08:15 - 09:45

Raum: Hörsaal N07

Die jeweiligen Datenschutzbestimmungen zur Verarbeitung der Kontaktdaten sind den Veröffentlichungen des Landes Baden-Württemberg zu entnehmen.

Analysis auf Banachräumen

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum, der bzgl dieser Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist. Dann nennt man $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum.

Auf Banachräumen lässt sich eine Ableitung definieren. z.B. $f: V \to W$ (V, W Banachr.) heißt diffbar falls eine Abbildung A existiert, die linear und stetig ist, mit

$$f(x+h) = f(x) + A \cdot h + o(h)$$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$ (lim in Bezug auf $\|\cdot\|$ gemeint, mit der $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist)

Bemerkung: Im ∞-dimensionalen muss eine lineare Abbildung nicht stetig sein. Bsp: Differentiation ist linear, $\varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon^2}$ bzgl der supnorm wird das klein, die Ableitung aber groß.

Viele Sätze, z. B. Linearität dieser Ableitung ...
gelten immer noch,
Insbesondere der Fixpunktsatz von Banach!

Gewöhnliche Differentialgleichungen

<u>Motivation</u>: Ein Massepunkt falle im lokalen Gravitationsfeld unter Reibung.
Wie sieht die Bewegung des Punktes aus. Annahme: Bewegung nur in vertikaler Richtung. $x(t)$ gibt die Höhe zum Zeitpunkt t an.

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{-\,g}_{\text{Fallbeschl}} + \underbrace{r\cdot\dot{x}(t)}_{\text{Reibung}} \qquad g, r \in \mathbb{R}$$

Eine solche Gleichung nennt man Differentialgleichung.
Im folgenden überlegen wir, wie wir Lösungen dazu finden und ob überhaupt Lösungen existieren und/oder eindeutig sind.

Zur Gleichung wird oft ein Anfangswert angegeben:

$$x(0) = x_0 \quad \text{mit} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

<u>Definition</u>: Sei $f: \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}$, D offen, eine Funktion.

Die Gleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ nennt man Differentialgleichung <u>n-ter</u> Ordnung.

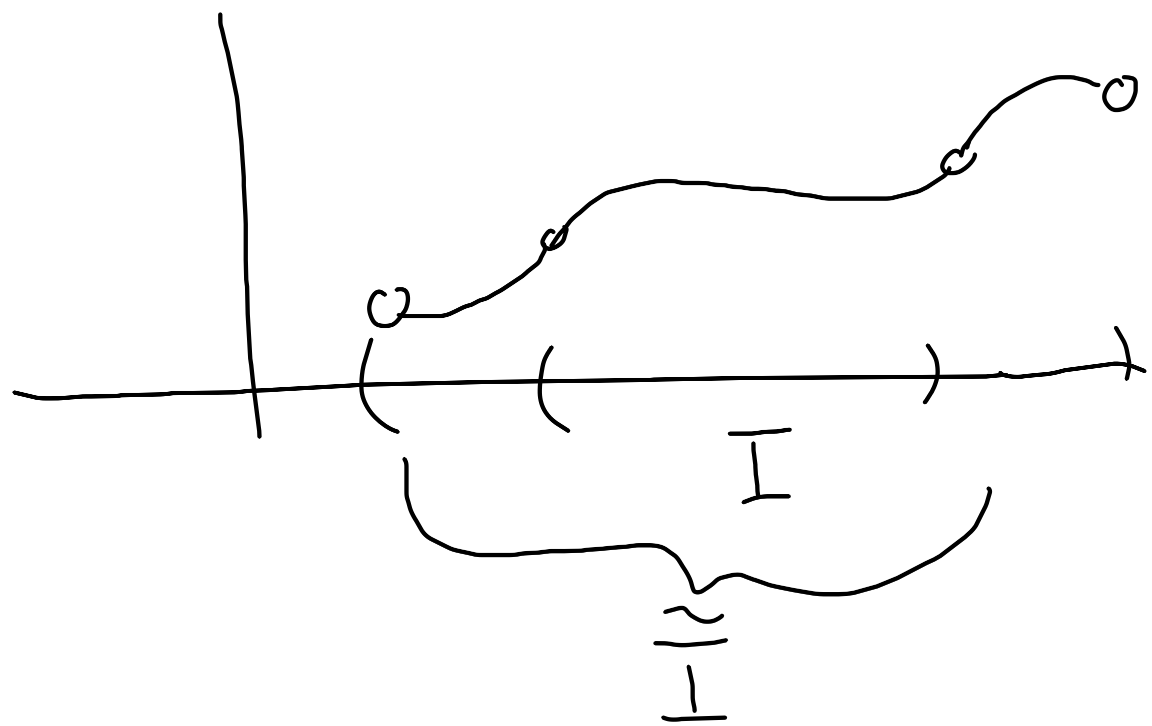
Die Forderung $y(x_0) = y_0$ nennt man Anfangswertproblem.

Sei $y: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, I ein offenes Intervall, mit

$y^{(n)} = f(x, \dots y^{(n-1)})$ für alle $x \in I$, dann nennt man diese Funktion y lokale Lösung der DGL, falls das AWP $y(x_0) = y_0$ erfüllt ist.

Falls $I = \mathbb{R}$, dann nennt man y eine globale Lösung.

Falls für jede weitere Lösung $\tilde{y}: \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \tilde{I}$, $y(x) = \tilde{y}(x)$ $\forall x \in I$ folgt: $I = \tilde{I}$, dann heißt y maximale Lösung.



Kein max Lösung

<u>Trennung der Variablen</u>: Betrachte eine DGL erster Ordnung der Form:

$$y' = g(y) \cdot h(x) \qquad \text{mit } g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

<u>Lösungsrezept</u>:

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = h(x) \cdot dx \qquad \Big| \int$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} h(x)\, dx \qquad \text{dann auflösen.}$$

Durch die Wahl der Grenzen, geht die Lösung durch (y_0, x_0) (AWP!)

<u>Bsp</u>: $y' = y^2 \cdot \cos x \qquad y(0) = 1$

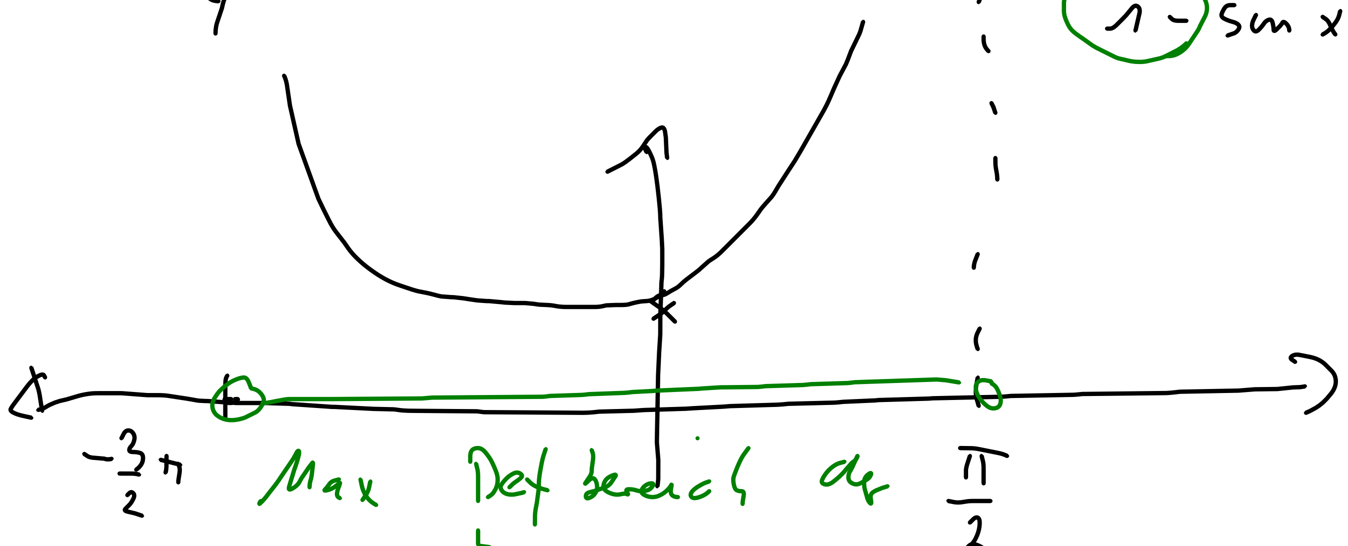
$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$$

$$\frac{1}{y^2}\, dy = \cos x \; dx \qquad \Big| \int$$

$$\int_1^y \frac{1}{y^2}\, dx = \int_0^x \cos x \, dx \iff \left[-\frac{1}{y}\right]_1^y = \left[\sin x\right]_0^x$$

$$\iff -\frac{1}{y} + 1 = \sin x - 0$$

$$-\frac{1}{y} = \sin x - 1 \implies y = \frac{1}{1 - \sin x}$$



Max Def bereich der Lösung.

Theorie dazu: $\quad y' = g(y)\, h(x)$

Sei H eine Stammfunktion von h

G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$.

Betrachte die "Höhenlinie" $\quad \overbrace{G(y) - H(x)}^{F(x,y)} = 0$

Satz über Implizite Fkt sagt uns, man findet eine Fkt $y(x)$

falls $\frac{d}{dy} G(y) \neq 0$ d.h. $\hat{g}(y) \neq 0$

Anwenden: $\quad \frac{d}{dx} y(x) = - \frac{\frac{d}{dx} F}{\frac{d}{dy} F} = \frac{h(x)}{\frac{1}{g(y)}} = h(x) \cdot g(y)$

Falls $g(y) = 0$ ist das unter Umständen problematisch.

In diesem Fall hat man immer die Lösung $y \equiv y_0$

$y' = 0 \qquad g(y_0) \cdot h(x) = 0 \quad \checkmark$

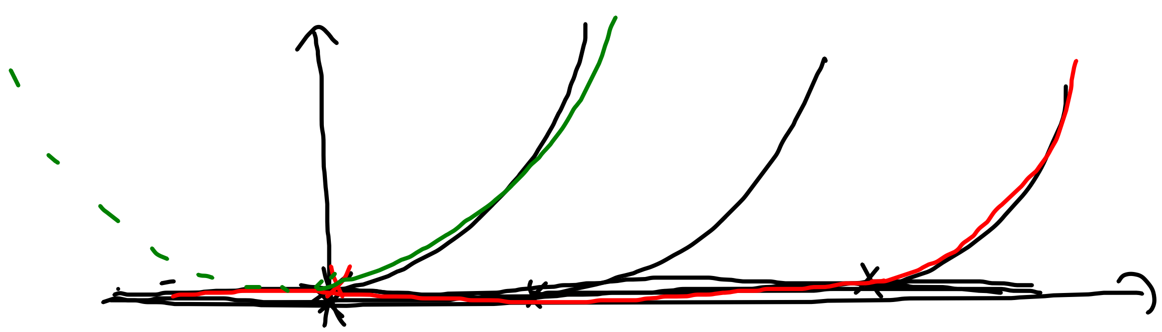
Bsp: $y' = \frac{2y}{x}$ AWP später

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ "$\Rightarrow$" $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$ $\quad | \int$

$\ln y = 2 \ln x + C_1$ $\quad | \, e^{\uparrow}$ (C_1 hängt vom AWP ab)

$y = x^2 \cdot e^{C_1}$

~~Bemerk~~ z.B. $y = x^2$ AWP: $y(0) = 0$



$y(0) = 0$

$y \equiv 0$ ist Lösung

$y' = 2\sqrt{y}$ $\quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + C_1$

$y = (x + C_1)^2$

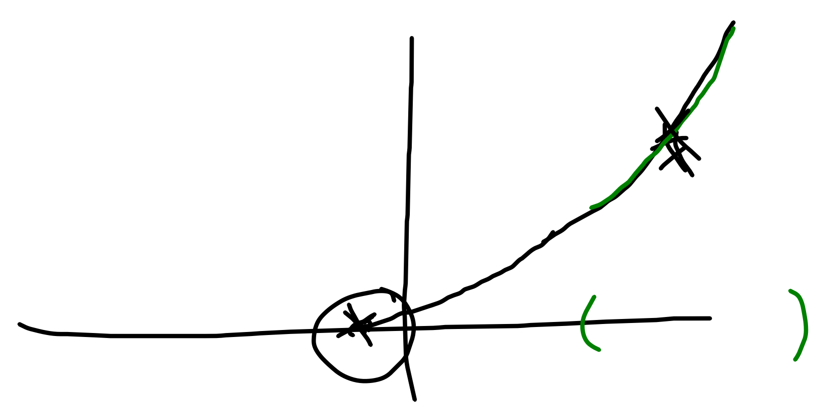
Zur DGL $y' = 2\sqrt{y}$ ist die Funktion

$y \equiv 0$ eine Lösung aber auch $y = x^2$. (

Ebenso $y = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < k \\ (x-k)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

Einsetzen $y = x^2$ $\quad y' = 2x \quad 2\sqrt{y} = 2x$ falls $x > 0$.

Die Lösungen sind also nicht eindeutig. Für $y_0 > 0$ sind sie zumindest lokal eindeutig



Variation der Konstanten:

Wir betrachten DGL der Form $y' = g(x) \cdot y + h(x)$

Sei zunächst $h(x) \equiv 0$, d.h. $y' = g(x) \cdot y$

Trennung der Variablen liefert: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot y$

"$\Rightarrow$" $\frac{dy}{y} = g(x)\, dx$ $\qquad \ln y = G(x) + C_1 \quad | \; e^{\uparrow}$

$y = e^{C_1} \cdot e^{G(x)}$

AWP: $\boxed{y = y_0 \cdot e^{G(x)}}$ wobei $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx$ d.h. $G(x_0) = 0$

Verallgemeinerung für $h(x) \not\equiv 0$.

Es reicht in diesem Fall eine Lösung zu finden. Weitere Lösungen kann man mit Hilfe der Funktion $y = C_1 e^{G(x)}$ basteln:

Geg: $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ (*)

Sei $y(x)$ eine Lösung dieser DGL.

Sei $\tilde{y}(x)$ eine Lösung der DGL

(A) $y' = g(x) \cdot y$ d.h. $\tilde{y} = C_1 e^{G(x)}$

Dann ist $y(x) + \tilde{y}(x)$ ebenfalls eine Lösung von (*)

Umgekehrt ist die Differenz zweier Lösungen von (*) eine Lösung von (A).

$$(y + \tilde{y})' = y' + \tilde{y}' = g(x) \cdot y + h(x) + g(x)\tilde{y} = g(x)(y + \tilde{y}) + h(x) \checkmark$$

$$(y - \tilde{y})' = g(x) \cdot y + \cancel{h(x)} - g(x) \cdot \tilde{y} - \cancel{h(x)} = g(x)(y - \tilde{y})$$ falls $y, \tilde{y}$ Lösungen von (*)